ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 31–40
УДК 517.95, 517.977
MSC2000 35Q72

 Л.В. Илларионова*

Задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции упругих волн

Рассматривается задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции упругих волн на трехмерном включении в безграничной однородной среде. Она заключается в минимизации отклонения поля смещений во включении от некоторого заданного за счет изменения источников поля во внешней среде. Доказана разрешимость задачи. Предложен алгоритм решения и обоснована его сходимость.

Ключевые слова: *стационарные уравнения дифракции упругих волн, задача оптимального управления, численный метод решения.*

1. Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$, заполненном однородной изотропной средой, имеется однородное ограниченное изотропное включение Ω_i с границей S. Обозначим $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}_i$; $\lambda_{i(e)}$,$\mu_{i(e)}$, $\rho_{i(e)}$ — параметры Ламе и плотность в $\Omega_{i(e)}$.

Предположим, что в области Ω_e имеются источники упругих колебаний, $\mathbf{u}_0$ — комплексная амплитуда поля смещений упругих волн в Ω_e, возбужденного ими. Упругие волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются на нем. В результате в области Ω_e возникают отраженные волны, а в области Ω_i появляются проходящие волны. Комплексная амплитуда полного поля потенциалов смещения равна $\mathbf{u}_i$ в Ω_i и $\tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{u}_0$ в Ω_e, где $\mathbf{u}_i$, $\tilde{\mathbf{u}}_e$ — комплексные амплитуды поля смещений проходящих и рассеянных упругих волн в Ω_i и Ω_e. Функции $\mathbf{u}_i$, $\tilde{\mathbf{u}}_e$ удовлетворяют однородным уравнениям колебаний

$$\mu_i \Delta \mathbf{u}_i + (\lambda_i + \mu_i)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \omega^2 \rho_i \mathbf{u}_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \tag{1}$$

$$\mu_e \Delta \tilde{\mathbf{u}}_e + (\lambda_e + \mu_e)\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_e) + \omega^2 \rho_e \tilde{\mathbf{u}}_e = 0 \text{ в } \Omega_e, \tag{2}$$

условию жесткого контакта на границе сред

$$\mathbf{u}_i = \tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{u}_0, \quad T_i \mathbf{u}_i = T_e(\tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{u}_0) \text{ на } S \tag{3}$$

и условиям излучения на бесконечности

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_e^{(p)}}{\partial |x|} - ik_p \tilde{\mathbf{u}}_e^{(p)} = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_e^{(s)}}{\partial |x|} - ik_s \tilde{\mathbf{u}}_e^{(s)} = O(|x|^{-1}), \tag{4}$$

где

$$T_{i(e)}\mathbf{u} \equiv 2\mu_{i(e)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda_{i(e)} \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu_{i(e)} \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

$$k_p^2 = \frac{\rho_e \omega^2}{\lambda_e + 2\mu_e}, \quad k_s^2 = \frac{\rho_e \omega^2}{\mu_e},$$

* Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65. Электронная почта: `illarionova_l@list.ru`

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ — единичный вектор нормали к S, направленный вне Ω_i; $\mathbf{u}_e^{(p)}$, $\mathbf{u}_e^{(s)}$ — продольная и поперечная волны, $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^{(p)} + \mathbf{u}_e^{(s)}$, $\nabla \times \mathbf{u}_e^{(s)} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{u}_e^{(p)} = 0$ (определение см. в [1, гл. 3, § 1])

Исследованию задачи (1)–(4) посвящено большое число работ. Вопросы существования и единственности классического решения исследованы в [2, 3]. Для численного решения задачи применялись конечно-разностные и проекционно-сеточные методы [4, 5], а также алгоритмы, основанные на преобразовании исходных дифференциальных задач к эквивалентным им интегральным уравнениям при помощи прямого [6, 1] и непрямого варианта метода интегральных уравнений [2, 3, 7, 8].

Различные обратные задачи и задачи оптимизации рассматривались ранее в [6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

Рассмотрим следующую задачу: изменяя источники волн в Ω_e (то есть управлением является $\mathbf{u}_0$), минимизировать отклонение поля смещений в Ω_i (либо на некотором подмножестве $Q \subset \Omega_i$) от некоторого требуемого. При этом изменение источников не должно быть «большим». Эти условия можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\int_Q |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{F}_d\|^2 \to \min,$$

где $\lambda \geq 0$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма, $\mathbf{u}_d$ и $\mathbf{F}_d$ – заданные функции. Сделаем замену

$$\tilde{\mathbf{u}}_e = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_F, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}_F$ — решение внешней задачи Дирихле

$$\begin{aligned}
&\mu_e \Delta \mathbf{u}_F + (\lambda_e + \mu_e)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_F) + \omega^2 \rho_e \mathbf{u}_F = 0 \text{ в } \Omega_e,\\
&\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_0 \text{ на } S,\\
&\frac{\partial \mathbf{u}_F^{(p)}}{\partial |x|} - ik_p \mathbf{u}_F^{(p)} = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_F^{(s)}}{\partial |x|} - ik_s \mathbf{u}_F^{(s)} = O(|x|^{-1}).
\end{aligned}$$

Тогда уравнения (1)–(4) принимают вид

$$\mu_{i(e)} \Delta \mathbf{u}_{i(e)} + (\lambda_{i(e)} + \mu_{i(e)})\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{i(e)}) + \omega^2 \rho_{i(e)} \mathbf{u}_{i(e)} = 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \tag{6}$$

$$\mathbf{u}_i = \tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{g}, \quad T_i \mathbf{u}_i = T_e(\tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{f}), \text{ на } S, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_e^{(p)}}{\partial |x|} - ik_p \tilde{\mathbf{u}}_e^{(p)} = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_e^{(s)}}{\partial |x|} - ik_s \tilde{\mathbf{u}}_e^{(s)} = O(|x|^{-1}), \tag{8}$$

где $\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{f} = T_e(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_F)$ — неизвестная функция (управление). Экстремальное условие можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\int_Q |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(S)} \to \min, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{K}, \tag{9}$$

где $\mathbf{f}_d$ — заданная на S функция; $\mathbf{K}$ — некоторое множество функций, заданных на S; $H^2(S) \equiv W_2^2(S)$ — стандартное пространство Соболева функций, заданных на S.

Целью данной работы является теоретический анализ задачи оптимального управления, которая заключается в нахождении функции $\mathbf{f}$ (управление) и соответствующих $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_e$, удовлетворяющих уравнениям (6)–(9). Доказывается существование единственного решения, описывается алгоритм конечномерной аппроксимации и обосновывается его сходимость. Отметим, что ранее автором была исследована аналогичная задача для уравнений дифракции акустических волн [12]. Одним из отличий задачи, рассматриваемой в настоящей работе, является то, что мы вынуждены искать решение в классе $C^{1,\alpha}$, так как отсутствуют результаты о корректной разрешимости задачи дифракции (6)–(8) в пространствах Соболева H^1.

Далее считаем выполненными следующие условия (их выполнение специально оговаривать не будем):

1) $S \in C^{1,\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $\mathbf{g} \in C^{1,\alpha}(S)$, $\mathbf{u}_d \in L^2(Q)$, $\mathbf{f}_d \in H^2(S)$;

2) $\mathbf{K}$ — непустое замкнутое выпуклое множество из $H^2(S)$;

3) $Q \subset \Omega_i$ — область с границей из $C^{0,1}$ либо поверхность класса $C^{0,1}$;

4) ω не является собственной частотой задачи

$$\begin{aligned}
&\mu_e \Delta \mathbf{u} + (\lambda_e + \mu_e)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \omega^2 \rho_e \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega_e,\\
&\mathbf{u} = 0 \text{ на } S,\\
&\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{(p)}}{\partial |x|} - ik_p \tilde{\mathbf{u}}^{(p)} = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{(s)}}{\partial |x|} - ik_s \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} = O(|x|^{-1}).
\end{aligned}$$

Последнее условие необходимо для корректной разрешимости задачи дифракции (6)–(8) при заданных f и g [3].

2. Некоторые свойства решения задачи дифракции (6)–(8)

Через $C^{m,\beta}(D)$ $(D \subset \mathbb{R}^d)$ обозначаем пространство Гельдера с нормой

$$\|f\|_{C^{m,\beta}(D)} = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)| + \max_{|\alpha| = m} \sup_{x, x' \in D,\, |x - x'| \le 1} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(x')|}{|x - x'|^\beta},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$,

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Пусть $\Gamma_{i(e)} = \Gamma_{i(e)}(x,y)$ — матрицы Купрадзе фундаментальных решений уравнений (6) (явные формулы см. в [8]). Введем интегральные операторы

$$W_{i(e)}\xi(x) = \int_S \Gamma_{i(e)}(x,y)\xi(y)\, dS_y, \qquad R_{i(e)}\xi(x) = \int_S T_{i(e)}\Gamma_{i(e)}(x,y)\xi(y)\, dS_y. \tag{10}$$

Отметим, что если $\xi \in C^{0,\alpha}(S)$, то $W_{i(e)}\xi \in C^\infty(\Omega_{i(e)}) \cap C^{1,\alpha}(\Omega_{i(e)})$. Потенциалы простого слоя $\mathbf{u}_{i(e)} = W_{i(e)}\xi_{i(e)}$ являются решением задачи дифракции (6)–(8), если и только если плотности $\xi_{i(e)}$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$W_i\xi_i - W_e\xi_e = \mathbf{g}, \quad \frac{1}{2}\xi_i + R_i\xi_i + \frac{1}{2}\xi_e + R_e\xi_e = T_e\mathbf{f} \qquad \text{на } S. \tag{11}$$

Теорема 1. *Если $\mathbf{f} \in C^{0,\alpha}(S)$, то задача (11) корректно разрешима в пространстве $\xi_i, \xi_e \in C^{0,\alpha}(S)$ и функции $\mathbf{u}_{i(e)} = W_{i(e)}\xi_{i(e)}$ являются единственным решением задачи дифракции (6)–(8).*

Доказательство см. в [10].

Пусть $\xi_{i(e)}^{(k)}$ — последовательность решений системы (11) при $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(k)}$. Из теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие 1. *Если* $\mathbf{f}^{(k)} \to \mathbf{f}$ *в* $C^{0,\alpha}(S)$, *то* $\xi_{i(e)}^{(k)} \to \xi_{i(e)}$ *в* $C^{0,\alpha}(S)$, *причем* $\xi_{i(e)}$ *— решение (11).*

Положим $\mathbf{u}_{i(e)}^{(k)} = W_{i(e)}\xi_{i(e)}^{(k)}$. Из следствия 1 и известных свойств поверхностных потенциалов (см. [8]) вытекает следующий результат.

Следствие 2. *Если* $\mathbf{f}^{(k)} \to \mathbf{f}$ *в* $C^{0,\alpha}(S)$, *то* $\mathbf{u}_{i(e)}^{(k)} \to \mathbf{u}_{i(e)}$ *в* $C^{1,\alpha}(\Omega_{i(e)})$, *причем* $\mathbf{u}_{i(e)}$ *— решение задачи дифракции (6)–(8).*

Если функция $\mathbf{u}$ задана в $\Omega_i \cup \Omega_e$, то полагаем

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}, \quad \mathbf{u}_e = \mathbf{u}|_{\Omega_e}.$$

Аналогично, если функции $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{u}_e$ заданы в областях Ω_i и Ω_e соответственно, то через $\mathbf{u}$ обозначаем функцию

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_i & \text{в } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_e & \text{в } \Omega_e. \end{cases}$$

В соответствии с этим решение уравнений (6)–(8) будем обозначать $\mathbf{u}$, подразумевая, что $\mathbf{u}_{i(e)} = \mathbf{u}|_{\Omega_{i(e)}}$. Определим также пространство

$$C^{1,\alpha} = \big\{\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus S): \quad \mathbf{u}_i \in C^{1,\alpha}(\Omega_i), \;\; \mathbf{u}_e \in C^{1,\alpha}(\Omega_e)\big\}$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{C^{1,\alpha}} = \|\mathbf{u}_i\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_i)} + \|\mathbf{u}_e\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)}$$

и введем аффинное отображение $A : H^2(S) \to C^{1,\alpha}$, которое каждой функции $f \in C^{0,\alpha}(S)$ ставит в соответствие решение $\mathbf{u}$ задачи дифракции (6)–(8).

Следствие 3. *Если* $\mathbf{f}^{(k)} \to \mathbf{f}$ *слабо в* $H^2(S)$, *то* $A(\mathbf{f}^{(k)}) \to A(\mathbf{f})$ *в* $C^{1,\alpha}$.

Доказательство. Так как вложение $H^2(S) \subset C^{0,\alpha}(S)$ компактно, то $\mathbf{f}^{(k)} \to \mathbf{f}$ в $C^{0,\alpha}(S)$. Осталось воспользоваться следствием 2. Следствие доказано.

3. Разрешимость задачи оптимального управления

Обозначим для краткости целевой функционал через

$$J(\mathbf{u},\mathbf{f}) = \frac{1}{2}\int_Q |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_d|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(S)}.$$

Определим множество $\mathcal{U}$ допустимых пар «состояние – управление», состоящее из всех $(\mathbf{u},\mathbf{f}) \in C^{1,\alpha} \times \mathbf{K}$, удовлетворяющих (6)–(8), то есть

$$\mathcal{U} = \{(A(\mathbf{f}),\mathbf{f}) : \mathbf{f} \in \mathbf{K}\},$$

оператор A определен в разделе 2. Нетрудно заметить, что множество $\mathcal{U}$ выпуклое.

Определение. Пару $(\mathbf{u}^*,\mathbf{f}^*)$, удовлетворяющую соотношениям

$$(\mathbf{u}^*,\mathbf{f}^*) \in \mathcal{U}, \quad J(\mathbf{u}^*,\mathbf{f}^*) \le J(\mathbf{u},\mathbf{f}) \;\; \forall (\mathbf{u},\mathbf{f}) \in \mathcal{U},$$

будем называть решением задачи управления (6)–(9).

Теорема 2. *Пусть* $\lambda > 0$ *либо множество* $\mathbf{K}$ *ограничено в* $H^2(S)$. *Тогда существует единственное решение задачи управления (6)–(9).*

Доказательство. Единственность решения вытекает из выпуклости множества $\mathcal{U}$ и строгой выпуклости функционала J. Докажем существование решения. Функционал J

ограничен снизу. Значит, он имеет точную нижнюю грань на $\mathcal{U}$, то есть существует минимизирующая последовательность

$$(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \in \mathcal{U}, \quad J(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \to j = \inf_{(\mathbf{u},\mathbf{f})\in\mathcal{U}} J(\mathbf{u}, \mathbf{f}).$$

Последовательность $\mathbf{f}_n$ ограничена. Если $\lambda > 0$, то это вытекает из неравенства

$$\frac{\lambda}{2}\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(S)} \le J(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n).$$

Если $\lambda = 0$, то — из ограниченности множества $\mathbf{K}$.

Значит, можно извлечь подпоследовательность $\mathbf{f}_{n_k} \to \mathbf{f}^*$ слабо в $H^2(S)$. Так как множество $\mathbf{K}$ выпуклое и замкнутое, то оно слабо замкнуто, поэтому $\mathbf{f}^* \in \mathbf{K}$. Кроме того, $\mathbf{u}_{n_k} = A(\mathbf{f}_{n_k}) \to \mathbf{u}^* = A(\mathbf{u}^*)$ в $C^{1,\alpha}$ (следствие 3). Значит, $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \in \mathcal{U}$. Квадрат гильбертовой нормы является слабо полунепрерывным снизу функционалом, поэтому

$$\|\mathbf{f}^* - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(S)} \le \underline{\lim}_{n_k\to\infty} \|\mathbf{f}_{n_k} - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(s)}.$$

Значит,

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \le \underline{\lim}_{n_k\to\infty} J(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{f}_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} J(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{f}_{n_k}) = j.$$

Это возможно только при $J(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) = j$, то есть $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*)$ — решение задачи (6)–(9). Теорема доказана.

4. Конечномерная аппроксимация задачи оптимального управления

Пусть H_n — n-мерное подпространство $H^2(S)$ $(n \ge 1)$, причем последовательность $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ аппроксимирует $H^2(S)$ в следующем смысле:

$$\forall \mathbf{f} \in H^2(S) \;\; \exists\{\mathbf{f}_n\} : \; \mathbf{f}_n \in H_n, \; \mathbf{f}_n \to \mathbf{f} \text{ в } H^2(S). \tag{12}$$

Для любого натурального n положим

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K} \cap H_n.$$

Так как множество $\mathbf{K}$ выпуклое и замкнутое, то $\mathbf{K}_n$ также выпуклое и замкнутое.

Через $\mathcal{U}_n$ обозначим множество пар $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$ таких, что $\mathbf{f} \in \mathbf{K}_n$, $\mathbf{u} = A(\mathbf{f}) \in C^{1,\alpha}$ — решение задачи (6)–(8), то есть

$$\mathcal{U}_n = \big\{(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathcal{U} : \quad \mathbf{f} \in \mathbf{K}_n\big\} \text{ — подмножество } \mathcal{U}.$$

Поставим задачу. Найти функции $(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)})$, удовлетворяющие соотношениям

$$(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)}) \in \mathcal{U}_n, \quad J(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)}) \le J(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \;\; \forall (\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathcal{U}_n. \tag{13}$$

З а м е ч а н и е. Задачу (13) можно рассматривать как конечномерную в следующем смысле. Так как $\mathbf{u}^{(n)}$ однозначно определяется управлением $\mathbf{f}^{(n)}$, то можно считать неизвестной только функцию $\mathbf{f}^{(n)}$, которая ищется в конечномерном пространстве.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (12), множество $\mathbf{K}$ имеет внутренние точки, $\lambda > 0$. Тогда*

(a) существует номер N такой, что для любого $n \ge N$ задача (13) однозначно разрешима;

(б) при $n \to \infty$

$$\mathbf{u}^{(n)} \to \mathbf{u}^* \text{ *в* } C^{1,\alpha}, \tag{14}$$

$$\mathbf{f}^{(n)} \to \mathbf{f}^* \text{ *в* } H^2(S), \tag{15}$$

где $(\mathbf{u}^*, f^*)$ *— решение задачи управления (6)–(9).*

Доказательство разобьем на несколько этапов в виде лемм.

Отметим, что из условий теоремы 3 вытекает разрешимость задачи (6)–(9).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда для любой пары* $(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathcal{U}$ *существует последовательность* $(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \in \mathcal{U}_n$ *такая, что*

$$\mathbf{u}_n \to \mathbf{u} \text{ в } C^{1,\alpha}, \quad \mathbf{f}_n \to \mathbf{f} \text{ в } H^2(S) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathcal{U}$. Так как множество $\mathbf{K}$ выпуклое и имеет внутренние точки, то любая его граничная точка является пределом некоторой последовательности внутренних точек. Тогда, используя условие (12), нетрудно доказать существование последовательности

$$\mathbf{f}_n \in \mathbf{K}_n, \quad \mathbf{f}_n \to \mathbf{f} \text{ в } H^2(S).$$

Положим $\mathbf{u}_n = A(\mathbf{f}_n)$ (оператор A определен в разделе 2). Тогда $(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \in \mathcal{U}_n$, причем $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ в $C^{1,\alpha}$ (следствие 3). Лемма доказана.

Согласно лемме 1 множество $\mathbf{K}_n$ непустое при любом достаточно большом n. Утверждение (а) теоремы 3 вытекает из теоремы 2 (достаточно взять вместо $\mathbf{K}$ множество $\mathbf{K}_n$, которое также является выпуклым, замкнутым и непустым). Осталось доказать утверждение (б).

Лемма 2. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда*

$$\|\mathbf{f}^{(n)}\|_{H^2(S)} \le C, \tag{16}$$

$$J(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)}) \to J(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*), \tag{17}$$

где $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*)$ *— решение задачи управления (6)–(9), а* $(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)})$ *— решение задачи (13), постоянная* C *не зависит от* n.

Доказательство. Согласно лемме 1 существует последовательность $(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \in \mathcal{U}_n$ такая, что

$$\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}^* \text{ в } C^{1,\alpha}, \quad \mathbf{f}_n \to \mathbf{f}^* \text{ в } H^2(S).$$

Тогда из (13) и определения $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*)$ вытекает

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \le J(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)}) \le J(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \to J(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*).$$

Значит, выполняется (17). Так как $\lambda > 0$, то из неравенства

$$\frac{\lambda}{2}\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(S)} \le J(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)})$$

и ограниченности числовой последовательности $\{J(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)})\}$ вытекает (16). Лемма доказана.

Напомним, что оператор $A : H^2(S) \to C^{1,\alpha}$ определен в разделе 2.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия теоремы 3,* $(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)})$ *— подпоследовательность решений задач (13). Тогда если*

$$\mathbf{f}^{(n)} \to \mathbf{f} \text{ *слабо в* } H^2(S), \tag{18}$$

$\mathbf{u} = A(\mathbf{f})$*, то* $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$ *является решением задачи управления (6)–(9) и выполняется (15).*

Доказательство. По следствию 2 выполняется $\mathbf{u}^{(n)} = A(\mathbf{f}^{(n)}) \to \mathbf{u}$ в $C^{1,\alpha}$. Так как $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$, то $(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathcal{U}$. Докажем, что $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$ — решение задачи (6)–(9). Из (17) следует

$$J(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)}) \to j \equiv \inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in K} J(\mathbf{u}, \mathbf{f}).$$

Так как гильбертова норма $\|\cdot\|_{H^2(S)}$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом, то

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \le j.$$

Это возможно только при $J(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = j$, то есть $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$ — решение задачи (6)–(9).

Осталось доказать (15). Так как

$$\mathbf{u}^{(n)} \to \mathbf{u} \text{ в } L^2(Q),$$

то из (17) вытекает

$$\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(S)} \to \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_d\|^2_{H^2(S)}.$$

Пространство $H^2(S)$ гильбертово. Следовательно, последнее соотношение и (18) эквивалентны

$$\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}\|^2_{H^2(S)} \to 0.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь утверждение (б) теоремы 2. Согласно лемме 3 и следствию 3 достаточно доказать (15). Пусть (15) не выполняется. Это означает, что существует функционал $F \in (H^2(S))^*$, число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\mathbf{f}^{(n_k)}$ такая, что

$$\left| \left\langle F, \mathbf{f}^{(n_k)} - \mathbf{f}^* \right\rangle_{(H^2(S))^* \times H^2(S)} \right| \ge \varepsilon. \tag{19}$$

Согласно лемме 2, последовательность $\mathbf{f}^{(n_k)}$ ограничена. Значит, из нее можно извлечь подпоследовательность

$$\mathbf{f}^{(n'_k)} \to \mathbf{f} \text{ слабо в } H^2(S).$$

Согласно лемме 3, функция $\mathbf{f}$ вместе с соответствующей $\mathbf{u} = A(\mathbf{f})$ является решением (6)–(9). Оно единственно по теореме 1. Значит, $\mathbf{f} = \mathbf{f}^*$. Получили $\mathbf{f}^{(n'_k)} \to \mathbf{f}^*$ слабо в $H^2(S)$. Это противоречит (19). Сходимость (15) доказана. Теорема 3 полностью доказана.

5. Решение конечномерной задачи

Если

$$\mathbf{K} = H^2(S),$$

то точно так же, как и в [12], выводятся следующие формулы для решения конечномерной задачи управления (13):

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{v}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} t_k \mathbf{v}^{(k)}, \qquad \mathbf{f}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} t_k \mathbf{e}^{(k)}, \tag{20}$$

где $\{\mathbf{e}^{(k)}\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве H_n.

Функции $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(k)}$ находятся как решения следующих двух задач дифракции:

$$\begin{cases} \mu_{i(e)}\Delta\mathbf{v}^{(0)}_{i(e)} + (\lambda_{i(e)}+\mu_{i(e)})\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}^{(0)}_{i(e)}) + \omega^2\rho_{i(e)}\mathbf{v}^{(0)}_{i(e)} = 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \\ \mathbf{v}^{(0)}_i = \mathbf{v}^{(0)}_e + \mathbf{g}, \quad T_i\mathbf{v}^{(0)}_i = T_e\mathbf{v}^{(0)}_e \text{ на } S, \\ \dfrac{\partial\left(\mathbf{v}^{(0)}_e\right)^{(p)}}{\partial|x|} - ik_p\left(\mathbf{v}^{(0)}_e\right)^{(p)} = O(|x|^{-1}), \\ \dfrac{\partial\left(\mathbf{v}^{(0)}_e\right)^{(s)}}{\partial|x|} - ik_s\left(\mathbf{v}^{(0)}_e\right)^{(s)} = O(|x|^{-1}); \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \mu_{i(e)}\Delta\mathbf{v}^{(k)}_{i(e)} + (\lambda_{i(e)}+\mu_{i(e)})\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}^{(k)}_{i(e)}) + \omega^2\rho_{i(e)}\mathbf{v}^{(k)}_{i(e)} = 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \\ \mathbf{v}^{(k)}_i = \mathbf{v}^{(k)}_e, \quad T_i\mathbf{v}^{(k)}_i = T_e(\mathbf{v}^{(k)}_e + \mathbf{e}^{(k)}) \text{ на } S, \\ \dfrac{\partial\left(\mathbf{v}^{(k)}_e\right)^{(p)}}{\partial|x|} - ik_p\left(\mathbf{v}^{(k)}_e\right)^{(p)} = O(|x|^{-1}), \\ \dfrac{\partial\left(\mathbf{v}^{(k)}_e\right)^{(s)}}{\partial|x|} - ik_s\left(\mathbf{v}^{(k)}_e\right)^{(s)} = O(|x|^{-1}). \end{cases} \tag{22}$$

Коэффициенты t_k являются решением системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}t_j = b_k \quad k = \overline{1,n}, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{jk} = a'_{jk} + \lambda a''_{jk}, \quad b_j = b'_j + \lambda b''_j, \\ &a'_{jk} = \frac{1}{2}\int_Q \left(\mathbf{v}^{(k)}\overline{\mathbf{v}}^{(j)} + \overline{\mathbf{v}}^{(k)}\mathbf{v}^{(j)}\right)dx, \quad a''_{jk} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{(k)},\, \overline{\mathbf{e}}^{(j)}\right)_{H^2(S)} + \left(\overline{\mathbf{e}}^{(k)},\, \mathbf{e}^{(j)}\right)_{H^2(S)}, \\ &b'_j = \frac{1}{2}\int_Q \left(\mathbf{v}^{(j)}\overline{\mathbf{v}}_d + \overline{\mathbf{v}}^{(j)}\mathbf{v}_d\right)dx, \quad b''_j = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{(j)},\, \overline{\mathbf{f}}_d\right)_{H^2(S)} + \left(\overline{\mathbf{e}}^{(j)},\, \mathbf{f}_d\right)_{H^2(S)}, \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{H^2(S)}$ — скалярное произведение в $H^2(S)$. Отметим, что матрица $(\!(a_{kj})\!)$ не вырожденная (доказывается так же, как и в [17]).

Таким образом, предлагаемый алгоритм имеет следующий вид:

1) находим функции $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(k)}$ ($k = \overline{1,n}$), как решения задач дифракции (21) и (22) соответственно;

2) вычисляем коэффициенты a_{jk} и b_j по формулам (24);

3) находим t_k как решение системы (23);

4) в качестве приближенного решения задачи берем

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{v}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} t_k\mathbf{v}^{(k)}, \quad \mathbf{f} \approx \mathbf{f}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} t_k\mathbf{e}^{(k)}.$$

Отметим, что основной объем вычислений приходится на решение задач дифракции (22).

Список литературы

1. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.

2. *Смагин С.И.* Интегральные уравнения задач дифракции. Владивосток: Дальнаука, 1995.

3. *Смагин С.И.* Об одной системе интегральных уравнений теории дифракции // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 8. С. 1432-1437.

4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

5. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

6. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.

7. *Ершов Н.Е., Смагин С.И.* Приближенное решение пространственных задач акустики и упругости методом потенциалов. В сб. «Математические модели, методы и приложения». Хабаровск: Изд-во ХГПУ, 2002. С. 45 - 115.

8. *Ершов Н.Е., Смагин С.И.* Решение пространственных задач акустики и упругости методом потенциалов // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 9. С. 1517-1525.

9. *Блохина Л.В., Ершов Н.Е.* Численное решение интегральных уравнений пространственной задачи распространения и дифракции акустических волн. В сб. докл. международной конференции по вычислительной математике, Новосибирск, 2004. - Новосибирск: ИМ СО РАН, 2004. С. 407-410.

10. *Kirsch A.* A weak bang-bang principle for the control of an exterior robin problem // Applicable Analysis. 1982. V. 13. P. 65-75.

11. *Kress R., Rundell W.* Inverse scattering for shape and impedance // Inverse Problems. 2001. № 17. P. 1075-1085.

12. *Angell T.S., Kirsch A.* Optimization methods in electromagnetic radiation. Springer, 2004.

13. *Yanzhao Cao, Stanescu D.* Shape optimization for noise radiation problems // Computers and Mathematics with Applications. 2002. № 44. P. 1527-1537.

14. *Habbal A.* Nonsmooth shape optimization applied to linear acoustic // SIAM Journal on Optimization. 1998. V. 8, № 4. P. 989-1006.

15. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989.

16. *Савенкова А.С.* Мультипликативное управление в задаче рассеяния для уравнения Гельмгольца // Сиб. журн. индустр. матем. 2007 (в печати).

17. *Илларионова Л.В.* Задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции акустических волн // Журн. выч. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, №2. С. 297-308.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 13 декабря 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ДВО РАН (проект № 09-II-CO-005), РФФИ (проект № 08-01-00947) и Программы Президиума РАН № 2

Illarionova L.V. Optimal control problem for stationary equations of elastic waves diffraction. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 31–40.

ABSTRACT

One consider the optimal control problem for stationary equations of elastic waves diffraction on three-dimensional inclusion in unbounded homogeneous medium. The problem is to minimize L^2-deviation of pressure field in inclusion from the given. The control is the field source in the exterior medium. The solvability of problem is proved. The algorithm of is proposed.

Key words: *stationary equations of elastic waves diffraction, optimal control problem, numerical solution.*