УДК 519.248:62-192+519.176
MSC2000 60K10+94Cxx

© Г.Ш. Цициашвили*

Асимптотические формулы для вычисления надежности решеток

Задача вычисления вероятностей связи между вершинами случайной решетки с идентичными ребрами представляет большой интерес в физических приложениях. Для решеток с двумя столбцами клеток эта задача была точно решена К. Тангаем с помощью трансфер-матриц. Однако при увеличении числа столбцов размерность трансфер-матриц быстро растет и пользоваться ими становится затруднительно. Поэтому в настоящей работе предлагается решать задачу в в тех случаях, когда ребра решетки являются низко- или высоко-надежными. Для этого выводятся асимптотические формулы, выражающие вероятность связи между вершинами через надежность ребра и целочисленные параметры решетки. Приводятся алгоритмы нахождения параметров построенных асимптотических соотношений. Основу этих алгоритмов составляют геометрические построения.

Ключевые слова: *случайная решетка, пути и разрезы с минимальным числом ребер.*

Введение

Задача вычисления вероятности связи двух вершин случайного графа (вероятности существования пути с работающими ребрами) является сложной вычислительной задачей. Она в общем случае требует числа арифметических операций, растущего в геометрической прогрессии в зависимости от числа ребер графа (см. [1], [2]). Поэтому разработка специальных методов уменьшения вычислительной сложности была и остается актуальной задачей прикладной математики.

Для случайных решеток с идентичными ребрами эта задача представляет особый интерес в связи с приложениями в физике (см. [3], [4]). Предложенный в данных работах метод вычисления вероятностей связи между вершинами решетки основан на трансфер-матрицах. Особенностью этого метода является возможность получения рекуррентных по длине решетки линейных соотношений, содержащих трансфер-матрицу, размерность которой достаточно быстро растет с ростом ширины решетки.

Основной задачей работы является выбор альтернативного метода вычисления вероятностей связи, основанного на предположении малости вероятности работы или вероятности отказа ребра решетки. Данные предположения позволяют получить асимптотические формулы для вероятностей связи между вершинами решетки, основанные на их представлении в виде суммы вероятностей работы всех ребер в путях с минимальным числом ребер — для низконадежных ребер или в виде суммы вероятностей отказа всех ребер в разрезах с минимальным числом ребер — для высоконадежных ребер. Построение соответствующих асимптотических соотношений — более простая вычислительная задача, которая сводится

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041,Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guram@iam.dvo.ru

к сравнительно несложным, хотя в некоторых случаях и громоздким, перечислительным задачам теории графов и решеток.

1. Асимптотические соотношения

Пусть $\Gamma = \{U, W\}$ — неориентированный граф с конечным множеством вершин U, с множеством ребер $W = \{w = (u, v),\ u, v \in U\}$ и с фиксированными начальной и конечной вершинами $u_0, v_0 \in U$. Зададим множество $\mathcal{R}$ всех ациклических путей R между вершинами u_0, v_0 и множество $\mathcal{L} = \{L\}$ разрезов, каждый из которых строится путем выбора в путях $R \in \mathcal{R}$ по одному ребру. Тем самым для любого разреза $L \in \mathcal{L}$ и для любого пути $R \in \mathcal{R}$ пересечение $R \cap L \neq \emptyset$. Обозначим $\mathcal{R}_1 = \{R_1, ..., R_m\} \subseteq \mathcal{R}$ совокупность минимальных по числу ребер путей из семейства $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}_1 = \{L_1, ..., L_n\} \subseteq \mathcal{L}$ — совокупность минимальных по числу ребер разрезов из семейства $\mathcal{L}$.

Полагаем, что каждое ребро $w \in W$ работает с вероятностью $p,\ 0 < p < 1,\ \overline{p} = 1 - p$, независимо от других ребер. Обозначим через P_Γ вероятность существования работающего пути между вершинами u_0, v_0 в графе Γ и положим $\overline{P}_\Gamma = 1 - P_\Gamma$ — вероятность отказа графа.

Лемма 1. *Если $p = p(h) \to 0,\ h \to 0$ (случай низконадежных ребер), то*

$$P_\Gamma \sim \sum_{i=1}^{m} \prod_{w \in R_i} p(h),\ h \to 0. \tag{1}$$

Если $\overline{p}_w(h) \to 0,\ h \to 0$ (случай высоконадежных ребер), то

$$\overline{P}_\Gamma \sim \sum_{i=1}^{n} \prod_{w \in L_i} \overline{p}(h),\ h \to 0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть U_R — событие, состоящее в работе всех ребер пути R, и V_L — событие, состоящее в отказе всех ребер разреза L. Нетрудно получить, что

$$P_\Gamma = P\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} U_R\right),\ \overline{P}_\Gamma = P\left(\bigcup_{L \in \mathcal{L}} V_L\right). \tag{3}$$

Из формул (3) следует, что

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} P(U_R) - \sum_{R, R' \in \mathcal{R}} P(U_R U_{R'}) \le P_\Gamma \le \sum_{R \in \mathcal{R}} P(U_R),$$

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} P(V_L) - \sum_{L, L' \in \mathcal{L}} P(V_L V_{L'}) \le \overline{P}_\Gamma \le \sum_{L \in \mathcal{L}} P(V_L).$$

Тогда

$$P_\Gamma \sim \sum_{R \in \mathcal{R}} P(U_R) \sim \sum_{R \in \mathcal{R}_1} P(U_R) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{w \in R_i} p(h),\ h \to 0;$$

$$\overline{P}_\Gamma \sim \sum_{L \in \mathcal{L}} P(V_L) \sim \sum_{L \in \mathcal{L}_1} P(V_L) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{w \in L_i} \overline{p}(h),\ h \to 0.$$

Лемма доказана.

2. Применение асимптотических соотношений к решеткам

Рассмотрим конечную решетку размером $(n+n_+)\times(m+m_+)$,

$$m \geq 0,\ n > 0,\ m_+ \geq 0,\ n_+ \geq 0 \tag{4}$$

(случай $m > 0,\ n \geq 0$ рассматривается аналогично) и выделим в ней начальную вершину $u_0 = (0,0)$ и конечную вершину $v_0 = (n,m)$ во внутреннем прямоугольнике S, тогда как вершины с координатами $(0,0)$, $(n+n_+, m+m_+)$ являются крайними для окаймляющего S внешнего прямоугольника S'. Обозначим через δS, $\delta S'$ границы прямоугольников S, S' соответственно.

Если $p(h) = h$ и r_i — число ребер в пути R_i, то в силу формулы (1)

$$P_\Gamma \sim \sum_{i=1}^{m} h^{r_i} \sim ah^b,\ b = \min_{1\leq i\leq m} r_i = m+n,\ a = C_{m+n}^m,$$

где a — количество путей с числом ребер b. Если $\overline{p}(h) = h$ и l_i — число ребер в разрезе L_i, то в силу формулы (2)

$$\overline{P}_\Gamma \sim \sum_{i=1}^{m} h^{l_i} \sim ch^d,\ d = \min_{1\leq i\leq m} l_i, \tag{5}$$

где c — количество разрезов с числом ребер d.

Построим алгоритм определения параметров c, d формулы (5). Выделим в условии (4) случаи:

1) $n_+ = m_+ = 0$, вершина v_0 лежит в противоположном u_0 конце диагонали S' (рис. 1),

2) $m_+ = 0,\ n_+ > 0$, вершина v_0 находится на противоположной u_0 стороне прямоугольника S' (рис. 2),

3) $n_+ > 0,\ m_+ > 0$, вершина v_0 находится либо на смежной с u_0 стороне, либо внутри прямоугольника S' (рис. 3).

Во всех трех случаях вершина $u_0 = (0,0)$ расположена в левом нижнем углу прямоугольника S', а $v_0 \neq u_0$ может быть произвольной вершиной прямоугольника S'.

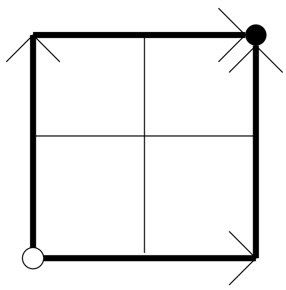

Рис. 1.

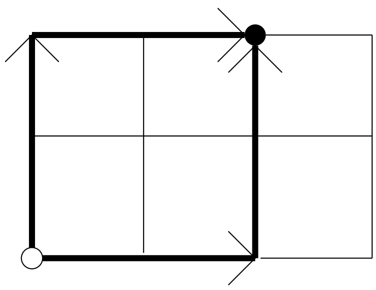

Рис. 2.

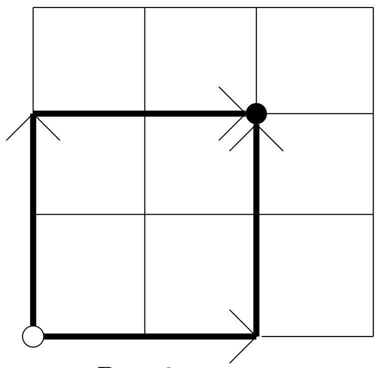

Рис. 3.

Построенной конечной решетке S' можно сопоставить ориентированный граф, в котором каждое ребро, проходящее из вершины u в вершину v, имеет противоположное ребро, проходящее из вершины v в вершину u. Поэтому с помощью известной теоремы Форда – Фалкерсона о равенстве максимального потока и минимальной пропускной способности разрезов [5, гл. 1], [6, гл. VIII] нетрудно, подсчитывая число α ребер, выходящих из начальной вершины u_0, и число β ребер, входящих в конечную вершину v_0, получить неравенство $d \leq \min(\alpha, \beta)$, которое в перечисленных случаях превращается в соотношение $d \leq 2$. Направляя единичные потоки по ребрам, содержащимся в путях $(0,0) \to (n,0) \to (n,m)$, $(0,0) \to (0,m) \to$

(n, m), и нулевые потоки по остальным ребрам графа (см. рис. 1–3), можно превратить неравенство $d \le 2$ в равенство

$$d = I(m + m_+ > 0) + 1. \tag{6}$$

Перейдем к нахождению константы c, которая в каждом из перечисленных случаев определяется по-своему.

1) Ограничимся случаем $m + m_+ > 0$; в случае $m + m_+ = 0$ все вычисления упрощаются. Для этого, учитывая равенство $d = 2$, выберем те пары ребер $L = \{l_1, l_2\}$, через которые проходят все пути из набора $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$. Пусть $L \not\subset \delta S$, т.е. одно из ребер набора L не принадлежит периметру прямоугольника S. Тогда нетрудно подобрать путь $R \in \mathcal{R}$, проходящий вдоль периметра δS и не имеющий общих ребер с набором L. Пусть $L \subset \delta S$, тогда набор L образует разрез в первом случае, если он состоит из ребер, смежных с начальной u_0 или с конечной v_0 вершиной (см. рис. 4), во втором случае, если $m = 0, 1$, ребра l_1, l_2 параллельны прямой $n = 0$ (или прямой $m = 0$) и их проекции на эту прямую совпадают (см. рис. 5, 6). Тогда возникает равенство

$$c = 2I(m > 0) + nI(m = 0, 1) + mI(n = 1). \tag{7}$$

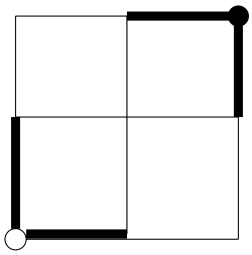

Рис. 4.

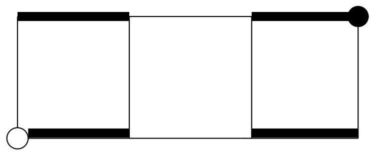

Рис. 5.

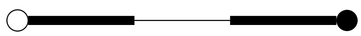

Рис. 6.

2) Аналогичные рассуждения приводят к равенству

$$c = I(m > 0) + nI(m = 0, 1). \tag{8}$$

3) Аналогичные рассуждения приводят к равенству

$$c = 1 + nI(m = 0, m_+ = 1). \tag{9}$$

Таким образом, равенства (6)–(9) дают значения констант c, d в асимптотической формуле (5) и позволяют оценить вероятность отсутствия связи между вершиной u_0, находящейся в углу, и любой другой вершиной v_0 дискретного прямоугольника S'. Тем самым исходная асимптотическая задача вычисления вероятности отсутствия связи между двумя вершинами графа разбита на несколько задач, каждая из которых решена с помощью сравнительно несложных логико-геометрических рассуждений. Предложенная техника асимптотического анализа может быть распространена на случай, когда u_0, v_0 — произвольные вершины дискретного прямоугольника S'.

Список литературы

1. *Barlow R.E., Proschan F.* Mathematical Theory of Reliability. London and New York, Wiley, 1965.

2. *Ushakov I.A. et al.* Reliability of technical systems: Handbook: Moscow: Radio and Communication, 1985. 608 p. (In Russian).

3. *Tanguy C.* What is the probability of connecting two points? // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. Vol. 40. Pp. 14099–14116.

4. *Tanguy C.* Asymptotic dependence of average failure rate and MTTF for a recursive meshed network architecture. Reliability and risk analysis: theory and applications. 2009. Vol. 2 (13), part 2. Pp. 45–54.

5. *Ford L.R., Fulkerson D.R.* Flows in networks. 1962. Princeton university press. Princeton, New Jersey.

6. *Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е.* Теория графов. Учебное пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1976.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 7 октября 2009 г.

Tsitsiashvili G.Sh. Asymptotic formulas for a calculation of a lattice reliability. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 86–90.

ABSTRACT

A calculation of a probability that there is a working way between lattice nodes has interesting physical applications. For a lattice with two columns of cells these calculations are suggested by Ch. Tanguy and are based on transform matrices. But when a number of columns increases a transform matrix dimension increases significantly also and it is difficult to use this method.
So in this paper we suggest to solve the problem in cases when lattice arcs are low or high reliable. For this aim asymptotic formulas which estimate connection probabilities by the arc reliability and by integer parameters of the lattice are suggested. Algorithms to find parameters of suggested asymptotic formulas are constructed. These algorithms are based on geometric componentries.
Key words: *a random lattice, ways and cross sections with minimal numbers of arcs.*