Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 231–241

УДК 517.95
MSC2010 35J05

© А. А. Илларионов, Л. В. Илларионова[1]

Аналитические решения экстремальных задач для уравнения Лапласа

Представлены аналитические решения некоторых экстремальных задач для уравнения Лапласа в круге.

Ключевые слова: *уравнение Лапласа, экстремальные задачи, задачи оптимального управления для дифференциальных уравнений.*

Введение

Начиная со второй половины XX в. много работ посвящено исследованию экстремальных и оптимизационных задач для уравнений с частными производными (см., например, [1, 2, 3] и ссылки там). Даже в линейном случае такие задачи не удается решить явно. В настоящей работе представлены аналитические решения простейших экстремальных задач для уравнения Лапласа.

Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) : \ \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — единичный круг с центром в точке $x = 0$, $L^p(Q)$ — банахово пространство функций u, которые определены и измеримы на множестве Q, причем интеграл Лебега $\int_Q |u|^p \, dQ$ существует и конечен, $C^n(Q)$ — множество функций, которые определены и n раз непрерывно дифференцируемы на Q.

Мы рассмотрим две задачи. Пусть f — заданный элемент из $L^2(\Omega)$.

Задача I. Найти такую функцию $u \in L^2(\Omega)$, что

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ &\int\limits_\Omega |u - f|^2 \, d\Omega \to \min\,. \end{aligned} \tag{1}$$

[1]ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; ВЦ ДВО РАН Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65. Электронная почта: `illar_a@list.ru, illarionova_l@list.ru`

Задача II. Найти такую функцию $u_\lambda \in C(\overline{\Omega})$, что

$$\begin{aligned}&\Delta u_\lambda = 0 \text{ в } \Omega,\\ &\lambda \int\limits_\Omega |u_\lambda - f|^2 \, d\Omega + \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma |u_\lambda|^2 \, d\Gamma \to \min .\end{aligned}$$

Здесь $\lambda \in (0, +\infty)$ (фиксированное число), а $\Gamma = \partial\Omega$ — граница Ω.

Выполнение уравнения (1) понимается в смысле обобщенных функций. Отметим, что если $u \in L^2(\Omega)$ удовлетворяет (1) в смысле теории распределений, то функция u — аналитическая в Ω и соотношение (1) выполняется в классическом смысле.

Обе поставленные задачи имеют не более одного решения. Стандартным образом доказывается, что для любой $f \in L^2(\Omega)$ задача I имеет решение. Однако вопрос о разрешимости задачи II является менее тривиальным.

Будем использовать полярные координаты (ρ, φ). Пусть $\hat{\Omega} = [0, 1) \times [0, 2\pi]$. Если функция v задана в Ω, то через $\hat{v}$ обозначаем функцию, заданную в $\hat{\Omega}$ по формуле

$$\hat{v}(\rho, \varphi) = v(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi). \tag{2}$$

Если функция $\hat{v}$ определена на $\hat{\Omega}$ и является 2π-периодичной по второй переменной, то через v обозначаем функцию, определенную в Ω по формуле (2).

В частности,

$$\hat{u}(\rho, \varphi) = u(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi), \quad \hat{f}(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi).$$

Введем аналитическую функцию $G : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G(t, \theta) = \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos\theta + t^2}.$$

Отметим, что классическая формула Пуассона для решения задачи Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = g \text{ на } \Gamma,$$

имеет (в полярных координатах) вид

$$\hat{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} G(\rho, \varphi - \psi) \cdot \hat{g}(\psi) \, d\psi, \quad (\rho, \varphi) \in \hat{\Omega}.$$

Основные результаты работы заключаются в следующем.

Введем дифференциальный оператор $D : C^1(\hat{\Omega}) \to C(\hat{\Omega})$ по формуле

$$(Dv)(t, \theta) = \frac{d}{dt} \Big(tv(t, \theta) \Big).$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Тогда решение задачи I определяется (в полярных координатах) формулой*

$$\hat{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\hat{\Omega}} (DG) \big(\rho r,\ \varphi - \psi\big) \cdot \hat{f}(r, \psi) \cdot r \, d\psi \, dr, \quad (\rho, \varphi) \in \hat{\Omega}. \tag{3}$$

Для любого $r \in (0,1)$ через $\Omega'_r = r \cdot \Omega$ обозначаем круг радиуса r с центром в точке 0. Определим также кольцо $\Omega''_r = \Omega \setminus \overline{\Omega'_r}$. Будем использовать следующий единичный вектор

$$\tau(x) = \frac{(x_2, -x_1)}{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Теорема 2. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$, причем существуют такие $r \in (0,1)$ и $\varepsilon > 0$, что $f'_\tau \in L^{1+\varepsilon}(\Omega''_r)$. Тогда решение $u_\lambda \in C(\overline{\Omega})$ задачи II существует и определяется формулой*

$$u_\lambda(x) = \lambda \int_0^1 t^\lambda \cdot u(tx)\, dt, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

где u — решение задачи I.

Эти теоремы будут доказаны в § 1 и § 2. Обоснование соотношений (3), (4) является модификацией одного из вариантов вывода формулы Пуассона. Мы выпишем решение в виде ряда Фурье, а потом вычислим его сумму.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда для любого компакта $Q \subset \Omega$ и целого $n \geq 0$*

$$\|u_\lambda - u\|_{C^n(Q)} \to 0 \text{ *при* } \lambda \to +\infty.$$

Доказательство приводится в конце § 2.

Замечание 1. Согласно [4] решение задачи I определяется формулой

$$u = f - \Delta w,$$

где w — решение первой краевой задачи для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 w = \Delta f \text{ в } \Omega,$$
$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Здесь и далее $\Delta^2 \cdot = \Delta(\Delta \cdot)$. Поэтому гладкость решения u повышается с увеличением гладкости f.

Замечание 2. Согласно следствию 1, $u_\lambda \to u$ «локально» в Ω. Если известно, что решение u задачи I обладает некоторой дополнительной гладкостью, то $u_\lambda \to u$ «глобально» в Ω. Пусть, например, функция u ограничена в Ω. Тогда, ввиду (4),

$$\sup_{x \in \Omega} |u_\lambda(x)| \leq \lambda \cdot C \cdot \int_0^1 t^\lambda\, dt = \frac{\lambda \cdot C}{\lambda + 1} \leq C = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

т.е. u_λ ограничена в Ω равномерно по λ. По следствию 1, $u_\lambda \to u$ почти везде в Ω. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, приходим к выводу, что для любого $p \in [1, +\infty)$

$$u_\lambda \to u \quad \text{в } L^p(\Omega) \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

Замечание 3. Пусть $\hat{f}(\rho,\varphi)=\hat{f}(\rho)$ (функция $\hat{f}$ не зависит от угла φ). Тогда решения u и u_λ задач I и II соответственно определяются формулами

$$u \equiv C_f, \quad u_\lambda \equiv \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot C_f,$$

где $C_f=\frac{1}{\pi}\int_\Omega f\,d\Omega$ — среднее значение f на Ω. Для доказательства достаточно заметить следующее. Делая замену $\theta=\varphi-\psi$ в интеграле (3), мы видим, что функция $\hat{u}=\hat{u}(\rho,\varphi)$ также не зависит от φ. Любая гармоническая в Ω функция, не зависящая от угла φ, является постоянной.

1. Решение задачи I

Применение метода Фурье. Для любого измеримого по Лебегу множества Q через

$$(u,v)_Q=\int\limits_Q u\cdot v\,dQ, \quad \|u\|_Q=\sqrt{(u,u)_Q}$$

обозначаем скалярное произведение и норму в пространстве $L^2(Q)$.

Определим гильбертово пространство

$$V=\{u\in L^2(\Omega): \quad \Delta u=0 \text{ в } \Omega\}.$$

со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\Omega$.

Лемма 1. *Множество $C^\infty(\overline{\Omega})\cap V$ плотно в V.*

Доказательство. Возьмем любую $u\in V$. Так как $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $L^2(\Omega)$, то существует такая последовательность $v_k\in C^\infty(\overline{\Omega})$, что

$$v_k\to u \text{ в } L^2(\Omega).$$

Нам понадобится стандартное пространство Соболева $H^2(\Omega)$, состоящее из функций, которые вместе со своими производными до 2-го порядка включительно принадлежат $L^2(\Omega)$. Пусть $H_0^2(\Omega)$ — линейное подпространство $H^2(\Omega)$, состоящее из функций $u\in H^2(\Omega)$, которые вместе со своими производными (1-го порядка) равны нулю на Γ (в смысле следов). Через $H^{-2}(\Omega)=(H_0^2(\Omega))^*$ обозначаем сопряженное к $H_0^2(\Omega)$ пространство (т.е. $H^{-2}(\Omega)$ — пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на $H_0^2(\Omega)$).

Оператор $\Delta: L^2(\Omega)\to H^{-2}(\Omega)$ непрерывный. Поэтому

$$\|\Delta v_k\|_{H^{-2}(\Omega)}\to\|\Delta u\|_{H^{-2}(\Omega)}=0.$$

Хорошо известно, что существует единственное решение w_k задачи

$$w_k\in H_0^2(\Omega), \quad \Delta^2 w_k=\Delta v_k \text{ в } H^{-2}(\Omega),$$

причем имеет место априорная оценка

$$\|w_k\|_{H^2(\Omega)} \le C \cdot \|\Delta v_k\|_{H^{-2}(\Omega)} \to 0.$$

Более того, т.к. $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то $w_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Положим $u_k = v_k - \Delta w_k$. Тогда

$$u_k \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \Delta u_k = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_k \to u \text{ в } L^2(\Omega).$$

□

Рассмотрим систему функций $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, где

$$p_k(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \rho^k \cdot \cos(k\varphi),$$
$$q_k(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \rho^k \cdot \sin(k\varphi).$$

Она является ортогональной в $L^2(\Omega)$, причем

$$\|1\|_\Omega^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \rho\, d\rho\, d\varphi = \pi,$$

$$\|q_k\|_\Omega^2 = \|p_k\|_\Omega^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^{2k+1} \cdot \cos^2(k\varphi)\, d\rho\, d\varphi = \frac{\pi}{2(k+1)}.$$

Кроме того, $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty \subset V$.

Лемма 2. *Ортогональная система $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty$ является полной в V.*

Доказательство. Хорошо известно, что любую функцию $u \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$ можно разложить в ряд Фурье по системе $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty$ (ряд будет сходиться равномерно на Ω). Отсюда, в частности, вытекает, что линейная оболочка системы $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty$ плотна в $V \cap C^1(\overline{\Omega})$. Тогда, по лемме 1, эта линейная оболочка плотна и в V. Последнее свойство эквивалентно полноте системы $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty$ (см. [5, § 6.6]). □

Задачу I можно записать в следующем виде:

$$u \in V, \quad \|u - f\|_\Omega \to \min,$$

т.е. она заключается в нахождении проекции элемента $f \in L^2(\Omega)$ на линейное подпространство $V \subset L^2(\Omega)$. Используя лемму 2 и свойство минимальности коэффициентов Фурье, приходим к следующему результату.

Лемма 3. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Тогда решение задачи I является суммой ряда Фурье функции f по системе $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty$, т.е.*

$$u = \alpha_0 + \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k p_k + \beta_k q_k) \text{ в } L^2(\Omega), \tag{5}$$

где коэффициенты Фурье α_k, β_k определяются формулами

$$\alpha_0 = \frac{(f,1)_\Omega}{\|1\|_\Omega^2} = \frac{1}{\pi} \cdot (f,1)_\Omega,$$
$$\alpha_k = \frac{(f,p_k)_\Omega}{\|p_k\|_\Omega^2} = \frac{2(k+1)}{\pi} \cdot (f,p_k)_\Omega,$$
$$\beta_k = \frac{(f,q_k)_\Omega}{\|q_k\|_\Omega^2} = \frac{2(k+1)}{\pi} \cdot (f,q_k)_\Omega.$$

Доказательство. Пусть u определяется формулой (5). Тогда $u \in V$. Возьмем любую другую функцию $v \in V$. Пусть $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности частичных сумм рядов Фурье функций u и v соответственно (по системе $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$). Так как система $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная, то

$$u_n \to u, \quad v_n \to v \text{ в } L^2(\Omega).$$

Согласно классическому свойству минимальности коэффициентов Фурье [5, § 6.5],

$$\|u_n - f\|_\Omega^2 \le \|v_n - f\|_\Omega^2.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|u - f\|_\Omega^2 \le \|v - f\|_\Omega^2.$$

Значит, u является решением задачи I. □

Суммирование ряда Фурье.

Лемма 4. *Для любых $t \in [0,1)$, $\theta \in \mathbb{R}$ справедлива формула*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(k+1) \cdot t^k \cdot \cos(k\theta) = \frac{d}{dt}\Big(t \cdot G(t,\theta)\Big). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть i — мнимая единица. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) \cdot t^k \cdot \cos(k\theta) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1} \cdot \cos(k\theta)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} t\left(\left(te^{i\theta}\right)^k + \left(te^{-i\theta}\right)^k\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1-te^{i\theta}} + \frac{t}{1-te^{-i\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t(1-t\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}\right).$$

Следовательно,

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(k+1) \cdot t^k \cdot \cos(k\theta) = -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) \cdot t^k \cdot \cos(k\theta) =$$
$$= -1 + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{t(1-t\cos\theta)}{1+t^2-2t\cos\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t-2t^2\cos\theta}{1+t^2-2t\cos\theta} - t\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t(1-t^2)}{1+t^2-2t\cos\theta}\right).$$

□

Доказательство теоремы 1. Ряд (5) равномерно сходится на любом компакте $Q \subset \Omega$, причем

$$u = \frac{(f,1)_\Omega}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\Big((f,p_k)_\Omega \cdot p_k + (f,q_k)_\Omega \cdot q_k\Big),$$

т.е. для всех $x \in \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Omega f(y)\,dy + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\int\limits_\Omega f(y)\cdot\Big(p_k(x)p_k(y) + q_k(x)q_k(y)\Big)\,dy.$$

Переходя к полярными координатам и применяя формулу для косинуса разности, получаем

$$\hat{u}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\hat\Omega}\hat{f}(r,\psi)\,r\,drd\psi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\cdot\int\limits_{\hat\Omega}\hat{f}(r,\psi)\cdot\rho^k\cdot r^k\cdot\cos(k(\varphi-\psi))\,r\,drd\psi,$$

где $(\rho,\varphi) \in \hat\Omega$. Так как $\rho < 1$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\cdot\rho^k\cdot r^{k+1}\cdot\cos(k(\varphi-\psi))$$

сходится абсолютно и равномерно по $(r,\psi) \in \hat\Omega$. Поэтому мы можем поменять местами знаки интеграла и суммы. Получаем

$$\hat{u}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\hat\Omega}\hat{f}(r,\psi)\cdot\left(1 + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\cdot(\rho\cdot r)^k\cdot\cos(k(\varphi-\psi))\right)\,r\,drd\psi.$$

Используя (6) при $t = \rho r$, $\theta = \varphi-\psi$, приходим к (3). Теорема 1 полностью доказана. $\square$

2. Решение задачи II

Применение метода Фурье. Определим банахово пространство

$$U = \{u \in C(\overline{\Omega}) : \ \ \Delta u = 0 \text{ в } \Omega\}$$

с нормой пространства $C(\overline{\Omega})$. Так же как и ранее, будем использовать систему функций $\{1, p_k, q_k\}$.

Лемма 5. *Линейная оболочка системы $\{1, p_k, q_k\}$ плотна в U.*

Доказательство. Согласно классическим результатам о решении краевых задач методом Фурье, любую функцию из $V \cap C^1(\overline{\Omega})$ можно разложить в ряд Фурье по системе $\{1, p_k, q_k\}$, причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $\overline{\Omega}$.

Следовательно, линейная оболочка системы $\{1, p_k, q_k\}$ плотна в подмножестве $U \cap C^1(\overline{\Omega})$. Осталось доказать, что множество $U \cap C^1(\overline{\Omega})$ плотно в U.

Возьмем любую $u \in U$. Пусть $g_k \in C^\infty(\Gamma)$, причем $g_k \to u|_\Gamma$ в $C(\Gamma)$. Через u_k обозначим решение задачи Дирихле:

$$\Delta u_k = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_k|_\Gamma = g_k.$$

Тогда $u_k \in U \cap C^\infty(\overline{\Omega})$, причем согласно принципу максимума

$$\|u - u_k\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|u - g_k\|_{C(\Gamma)} \to 0.$$

Значит, множество $U \cap C^1(\overline{\Omega})$ плотно в U. □

Лемма 6. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Функция $u \in U$ является решением задачи II тогда и только тогда, когда для любой $v \in \{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено равенство*

$$2\lambda(u, v)_\Omega + (u, v)_\Gamma = 2\lambda(f, v)_\Omega. \tag{7}$$

Доказательство. Определим функционал $J : U \to \mathbb{R}$ по формуле

$$J(u) = \lambda \int\limits_\Omega |u - f|^2 \, d\Omega + \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma.$$

Согласно лемме 5, соотношение (7) эквивалентно следующему

$$\forall v \in U \qquad 2\lambda(u, v)_\Omega + (u, v)_\Gamma = 2\lambda(f, v)_\Omega.$$

Последнее, в свою очередь, означает, что производная функционала J в точке u равна нулю. Поскольку J — выпуклый функционал, u является точкой минимума J на множестве U. □

Отметим, что система $\{1, p_k, q_k\}_{k=1}^\infty$ является ортогональной в $L^2(\Gamma)$, причем

$$\|1\|_\Gamma^2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

$$\|q_k\|_\Gamma^2 = \|p_k\|_\Gamma^2 = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(k\varphi) \, d\varphi = \pi.$$

Лемма 7. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда решение $u_\lambda \in C(\overline{\Omega})$ задачи II существует и определяется формулой*

$$u_\lambda = a_0 + \sum_{k=1}^\infty (a_k p_k + b_k q_k), \tag{8}$$

где

$$a_0 = \frac{2\lambda(f,1)_\Omega}{2\lambda\|1\|^2_\Omega + \|1\|^2_\Gamma} = \frac{\lambda}{\pi(\lambda+1)} \cdot (f,1)_\Omega,$$
$$a_k = \frac{2\lambda(f,p_k)_\Omega}{2\lambda\|p_k\|^2_\Omega + \|p_k\|^2_\Gamma} = \frac{2(k+1)}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{k+1+\lambda} \cdot (f,p_k)_\Omega,$$
$$b_k = \frac{2\lambda(f,q_k)_\Omega}{2\lambda\|q_k\|^2_\Omega + \|q_k\|^2_\Gamma} = \frac{2(k+1)}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{k+1+\lambda} \cdot (f,q_k)_\Omega$$

причем ряд (8) сходится абсолютно и равномерно на $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что ряд (8) сходится абсолютно и равномерно на $\overline{\Omega}$. Действительно, в этом случае $u_\lambda \in U$, а из определения коэффициентов a_k, b_k и ортогональности системы $\{1, p_k, q_k\}$ в $L^2(\Omega)$ и $L^2(\Gamma)$ вытекает, что u_λ удовлетворяет (7) и поэтому является решением задачи II.

Ряд (8) мажорируется на $\overline{\Omega}$ числовым рядом

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|). \tag{9}$$

Осталось доказать, что ряд (9) сходится. Очевидно, что

$$|a_k| \le C \cdot |(f,p_k)_\Omega| \le C \cdot \left(|(f,p_k)_{\Omega'_r}| + |(f,q_k)_{\Omega''_r}|\right).$$

Здесь и ниже через C обозначаются положительные постоянные, не зависящие от k. Кроме того,

$$|(f,p_k)_{\Omega'_r}| \le C \cdot r^k.$$

Интегрируя по частям и используя неравенство Гельдера, получаем

$$|(f,p_k)_{\Omega''_r}| = \left| \int_r^1 \int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho,\varphi) \cdot \rho^{k+1} \cos(k\varphi)\, d\varphi\, d\rho \right| = \frac{1}{k} \left| \int_r^1 \int_0^{2\pi} \hat{f}'_\varphi(\rho,\varphi) \cdot \rho^{k+1} \sin(k\varphi)\, d\varphi\, d\rho \right| =$$
$$= \frac{1}{k} \cdot \left|(f'_\tau, q_k)_{\Omega''_r}\right| \le \frac{1}{k} \cdot \|f'_\tau\|_{L^{1+\varepsilon}(\Omega''_r)} \cdot \|q_k\|_{L^{1+1/\varepsilon}(\Omega)} \le \frac{C}{k^{1+\delta}},$$

где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Следовательно,

$$|a_k| \le C \cdot \left(r^k + \frac{1}{k^{1+\delta}}\right).$$

Оценка для b_k получается аналогичным образом. В итоге

$$|a_k| + |b_k| \le C \cdot \left(r^k + \frac{1}{k^{1+\delta}}\right).$$

Так как $r \in (0,1)$, $\delta > 0$, то числовой ряд (9) сходится. □

Доказательство теоремы 2 и следствия 1

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$u_\lambda(x) = \lambda \int\limits_0^1 t^\lambda \cdot u(tx)\,dt, \quad x \in \Omega,$$

где функция u является решением задачи I. Так как

$$\lambda \int\limits_0^1 t^\lambda \cdot p_k(tx)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+k+1} p_k, \quad \lambda \int\limits_0^1 t^\lambda \cdot q_k(tx)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+k+1} q_k,$$

то, используя формулу (5), получаем

$$u_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\lambda+1}\alpha_0 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda}{\lambda+1+k}\left(\alpha_k p_k(x) + \beta_k q_k(x)\right) = a_0 + \sum_{k=1}^\infty \left(a_k p_k(x) + b_k q_k(x)\right).$$

Поэтому, по лемме 7, u_λ является решением задачи II. □

Лемма 8. *Пусть* $\hat{v} \in C^\infty(\hat{\Omega})$ *и*

$$\hat{v}_\lambda(\rho,\varphi) = \lambda \cdot \int\limits_0^1 t^\lambda \cdot \hat{v}(t\rho,\varphi)\,dt, \quad (\rho,\varphi) \in \hat{\Omega}.$$

Тогда для любого компакта $Q \subset \hat{\Omega}$ *и натурального* n

$$\|\hat{v}_\lambda - \hat{v}\|_{C^n(Q)} \to 0 \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда Q — замкнутый шар радиуса $R \in (0,1)$ с центром в точке $x = 0$. Возьмем любые целые $k, m \geq 0$. Положим

$$w(\rho,\varphi) = \frac{\partial^{k+m}}{\partial\rho^k \partial\varphi^m}\hat{v}(\rho,\varphi), \quad w_\lambda(\rho,\varphi) = \frac{\partial^{k+m}}{\partial\rho^k \partial\varphi^m}\hat{v}_\lambda(\rho,\varphi), \quad (\rho,\varphi) \in [0,R]\times[0,2\pi].$$

Нужно доказать, что

$$w_\lambda \to w \text{ равномерно на } [0,R]\times[0,2\pi]. \tag{10}$$

Используя определения w, w_λ и применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} w_\lambda(\rho,\varphi) = \lambda \int\limits_0^1 t^{\lambda+k} \cdot w(\rho t,\varphi)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+k+1}\int\limits_0^1 \frac{\partial t^{\lambda+k+1}}{\partial t} \cdot w(\rho t,\varphi)\,dt = \\ = \frac{\lambda}{\lambda+k+1}\Big(w(\rho,\varphi) + R_\lambda(\rho,\varphi)\Big), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$R_\lambda(\rho,\varphi) = -\int\limits_0^1 t^{\lambda+k+1}\cdot\frac{\partial w(\rho t,\varphi)}{\partial t}\,dt.$$

Так как $\hat{v}\in C^\infty(\hat{\Omega})$, то найдется такая постоянная $C>0$, что

$$\left|\frac{\partial w(\rho t,\varphi)}{\partial t}\right| \le C, \quad (\rho,\varphi)\in[0,R]\times[0,2\pi], \quad t\in(0,1).$$

Значит,

$$\max_{(\rho,\varphi)\in[0,R]\times[0,2\pi]}|R_\lambda(\rho,\varphi)| \le C\int\limits_0^1 t^{\lambda+k+1}\,dt = \frac{C}{\lambda+k+1}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Используя (11) и последнее соотношение, получаем (10). □

Следствие 1 вытекает из формулы (4) и леммы 8.

Список литературы

[1] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.

[2] Лионс Ж.-Л., *Управление сингулярными распределенными системами*, Мир, . М., 1987.

[3] Фурсиков А. В., *Оптимальное управление распределенными системами*, Теория и приложения, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[4] Илларионов А. А., “Разрешимость экстремальных задач для уравнения Пуассона и системы Стокса”, *Дальневост. матем. журн.*, **8**:2 (2008), 164–170.

[5] Треногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 мая 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00781 А), комплексной программы фундаментальных исследований ДВО РАН "Дальний Восток"№ 42П (раздел 2.20).

Illarionov A. A., Illarionova L. V. Analytic solutions of extremal problems for the Laplace’s equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 231–241.

ABSTRACT

We present analytic solutions of extremal problems for the Laplace’s equation.

Key words: *Laplace’s equation, extremal problems, optimal control problems for partial differential equations.*