Дальневосточный математический журнал. 2026. Т. 26. № 1. С. 3–13

УДК 517.958
MSC2020 35Q93 + 78A46

© Г. В. Алексеев[1,2], О. В. Соболева[1]

Анализ краевых задач для стационарных моделей диффузионного тепломассопереноса с переменными коэффициентами переноса

Доказывается глобальная разрешимость краевых задач для стационарных моделей диффузионного тепломассопереноса, учитывающих эффект Соре́ или Дюфура. Выводятся априорные оценки решения (температуры и концентрации) и анализируется их зависимость от всех коэффициентов переноса, входящих в рассматриваемые модели. Устанавливается особый характер зависимости указанных величин от модулей коэффициентов Соре́ или Дюфура. Доказывается теорема о локальной единственности слабого решения, обладающего дополнительным свойством гладкости из пространства $H^2(\Omega)$.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, тепломассоперенос, термодиффузия, краевая задача, переменные коэффициенты, разрешимость, единственность, коэффициент Соре́.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202601

Введение

В последние годы активно развивается новое научное направление в математической теории тепломассопереноса (ТМП), связанное с исследованием разрешимости краевых задач для моделей ТМП с переменными старшими и младшими коэффициентами. Среди многих работ в этой области отметим статьи [1–4], посвященные исследованию начально-краевых задач для нестационарных однодиффузионных моделей ТМП, и работы [5–7], посвященные анализу разрешимости краевых задач для стационарных однодиффузионных моделей ТМП. Работы [8–12] посвящены исследованию качественных свойств решений нестационарных моделей ТМП с помощью методов группового анализа.

---

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 680041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 680922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: `alekseev@iam.dvo.ru` (Г. В. Алексеев), `soboleva22@mail.ru` (О. В. Соболева).

Однако авторам фактически не известны работы по исследованию корректности краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП с переменными коэффициентами, учитывающих так называемые эффекты Соре́ и Дюфура (см. о них подробнее в [12,13]). Это говорит о важности и актуальности проблемы исследования существования и единственности решений краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП с переменными коэффициентами, описывающих движение теплопроводящей бинарной жидкости с учетом эффектов Соре́ и Дюфура.

Настоящая работа нацелена на исследование описанного класса краевых задач для стационарной модели диффузионного ТМП с переменными коэффициентами, зависящими от двух основных параметров: температуры жидкости и концентрации растворенного в жидкости вещества. Мы предложим математический аппарат исследования краевых задач для рассматриваемых моделей диффузионного ТМП и докажем на основе разрабатываемого аппарата глобальную разрешимость формулируемых ниже краевых задач, локальную единственность слабых решений, а также выведем и проанализируем априорные оценки.

1. Постановка основной краевой задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей: Γ_D и Γ_N. Рассмотрим следующую краевую задачу для модели тепломассопереноса, описывающую диффузионный тепломассоперенос бинарной теплопроводящей жидкости в области Ω:

$$-\mathrm{div}(k(T,C)\nabla T) = f \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$-\mathrm{div}(\lambda(T,C)\nabla C) - \mathrm{div}(D^\theta(T)\nabla T) = f^c \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$T = 0 \ \text{ на } \Gamma_D, \ C = 0 \text{ на } \Gamma, \ k(T,C)\frac{\partial T}{\partial n} = \chi \ \text{ на } \Gamma_N. \tag{3}$$

Здесь T — температура среды, C — концентрация растворенного вещества, составляющего вместе с основной средой бинарную жидкость, $p = P/\rho_0$, где P — давление, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность жидкости, $k = k(T,C)$ – коэффициент теплопроводности, $\lambda = \lambda(T,C)$ — коэффициент диффузии, $D^\theta(T)$ — коэффициент Соре́, f (либо f^c) — плотность источников тепла (либо вещества). Ниже на задачу (1)–(3) для заданных функций $k(T,C)$, $\lambda(T,C)$, $D^\theta(T)$, f, f^c и χ будем ссылаться как на задачу 1. Более подробно о выводе модели (1)–(3) можно прочитать в [12, 13]. Для того чтобы сделать более прозрачным и понятным наш анализ разрешимости, мы используем однородные граничные условия Дирихле для T и C в (3). Полученные результаты могут быть распространены на случай неоднородных условий Дирихле с помощью описанной в [14] процедуры, но это потребует дополнительного исследования.

Отметим, что мы используем различные граничные условия для температуры T и концентрации C на разных частях границы Γ: для температуры T мы используем условие Дирихле $T|_\Gamma = 0$ на всей границе Γ, тогда как для концентрации C мы используем условие Дирихле $C|_{\Gamma_D} = 0$ на Γ_D и нелинейное условие Неймана на Γ_N, которое физически отвечает заданию нормального теплового потока вещества

$k(T,S)\partial T/\partial n$ на участке Γ_N. По аналогичной схеме могут быть исследованы краевые задачи, отвечающие другим комбинациям граничных условий для T и C.

2. Функциональные пространства и основные предположения

Главную роль при исследовании задачи 1 будут играть следующие функциональные пространства:

$$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_\Gamma = 0\},\ \mathcal{T} = \{h \in H^1(\Omega) : h|_{\Gamma_D} = 0\},\ \mathcal{C} = H_0^1(\Omega).$$

Через $(\cdot,\cdot)_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ или $|\cdot|_{1,\Omega}$ будем обозначать скалярное произведение, норму или полунорму в $H^1(\Omega)$. Скалярные произведения и нормы в пространстве $L^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|_\Omega$. Z^* обозначает двойственное пространство к гильбертову пространству Z, а отношение двойственности для пары Z и Z^* записывается через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Z^*\times Z}$ или просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Отметим, что каждое из пространств $H^1(\Omega)$, $\mathcal{C} = H_0^1(\Omega)$ и $\mathcal{T}$ в случае, когда $\text{meas}\Gamma_D > 0$ (см. ниже), является гильбертовым пространством по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, которая эквивалентна полунорме $|\cdot|_{1,\Omega}$ для функции $C \in \mathcal{C}$ или $T \in \mathcal{T}$ в соответствии с неравенством Фридрихса – Пуанкаре́ [14, с. 26]:

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant C_P|\varphi|_{1,\Omega}\ \forall\,\varphi \in \mathcal{T}\ (\text{либо}\ \varphi \in \mathcal{C}),\ \ C_P = \text{const} > 1.$$

Определим произведение пространств $Z = \mathcal{T}\times\mathcal{C}$ с нормой

$$\|\mathbf{z}\|_Z^2 = \|T\|_{1,\Omega}^2 + \|C\|_{1,\Omega}^2\ \forall\,\mathbf{z} \equiv (T,C) \in Z$$

и обозначим через Z^* двойственное пространство $\mathcal{T}^*\times\mathcal{C}^*$ к Z.

Мы предполагаем, что исходные данные задачи 1 удовлетворяют следующим условиям.

2.1. Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, открытые подмножества Γ_D и Γ_N множества Γ удовлетворяют условиям $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ и $\text{meas}\Gamma_D > 0$.

2.2. $f \in \mathcal{T}^*$, $f^c \in \mathcal{C}^*$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$.

2.3. $k(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}^2)$, $\lambda(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}^2)$, $D^\theta \in C(\mathbb{R})$ и существуют положительные константы $k_{\min}$, $k_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ и $D^\theta_{\max}$ такие, что

$$k_{\min} \leqslant k(\tau_1,\tau_2) \leqslant k_{\max},\ \lambda_{\min} \leqslant \lambda(\tau_1,\tau_2) \leqslant \lambda_{\max},\ |D^\theta(\tau_1)| \leqslant D^\theta_{\max}\ \forall\,(\tau_1,\tau_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Далее нам потребуются соотношения и оценки, доказательство которых можно найти в [14, 15]:

$$(\nabla T,\nabla T) \geqslant \delta_1\|T\|_{1,\Omega}^2,\ (k(\eta,\mu)\nabla T,\nabla T) \geqslant k_*\|T\|_{1,\Omega}^2,$$

$$|(k\nabla T,\nabla S)| \leqslant k_{\max}\|T\|_{1,\Omega}\|S\|_{1,\Omega}\ \forall\,\eta,T,S \in \mathcal{T},\ \mu \in \mathcal{C},\ k_* \equiv \delta_1 k_{\min}, \quad (5)$$

$$(\nabla C,\nabla C) \geqslant \delta_2\|C\|_{1,\Omega}^2, (\lambda(\eta,\mu)\nabla C,\nabla C) \geqslant \lambda_*\|C\|_{1,\Omega}^2,$$

$$|(\lambda\nabla C,\nabla h)| \leqslant \lambda_{\max}\|C\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\ \forall\,\eta \in \mathcal{T},\mu,C,h \in \mathcal{C},\ \lambda_* \equiv \delta_2\lambda_{\min}, \quad (6)$$

$$|(D^\theta(T)\nabla T,\nabla h)| \leqslant D^\theta_{\max}\|T\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\ \forall T \in \mathcal{T},\ h \in \mathcal{C}, \quad (7)$$

$$|(\chi,h)_{\Gamma_N}| \leqslant \gamma\|\chi\|_{\Gamma_N}\|h\|_{1,\Omega}\ \forall\,\chi \in L^2(\Gamma_N),\ h \in \mathcal{T}. \quad (8)$$

Здесь δ_1, δ_2 и γ — некоторые положительные константы. зависящие от Ω; $k_{\min}$, $k_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ и $D^\theta_{\max}$ — константы, определенные в (4).

3. Существование слабого решения задачи 1

Как обычно, вводится слабая формулировка задачи 1. Она выводится стандартным образом и заключается в нахождении такой пары функций $T \in \mathcal{T}$, $C \in \mathcal{C}$, называемой слабым решением задачи 1, что

$$(k(T,C)\nabla T, \nabla S) = \langle f, S\rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \ \forall\, S \in \mathcal{T}, \tag{9}$$

$$(\lambda(T,C)\nabla C, \nabla h) + (D^\theta(T)\nabla T, \nabla h) = \langle f^c, h\rangle \ \ \forall\, h \in \mathcal{C}. \tag{10}$$

Чтобы доказать существование решения $(T,C) \in Z \equiv \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи (9), (10), применим теорему Шаудера о неподвижной точке. Предварительно мы введем пары $\mathbf{z} = (\eta, \mu) \in Z$, $\mathbf{y} = (T,C) \in Z$ и определим оператор $F : Z \to Z$, действующий по формуле: $F(\mathbf{z}) = \mathbf{y}$, где элементы $T \in \mathcal{T}$ и $C \in \mathcal{C}$ получаются путем последовательного решения линейных задач

$$a_1^{\mathbf{z}}(T,S) \equiv (k(\eta,\mu)\nabla T, \nabla S) = \langle l_1, S\rangle \ \forall\, S \in \mathcal{T}, \tag{11}$$

$$a_2^{\mathbf{z}}(C,h) \equiv (\lambda(\eta,\mu)\nabla C, \nabla h) = \langle l_2^{\mathbf{z}}, h\rangle \equiv \langle f^c, h\rangle - (D^\theta(\eta)\nabla T_{\mathbf{z}}, \nabla h) \ \forall\, h \in \mathcal{C}. \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{z} \equiv (\eta,\mu) \in Z \equiv \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ — заданный элемент, тогда как функционалы $l_1 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ и $l_2^{\mathbf{z}} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ определяются формулами

$$\langle l_1, S\rangle = \langle f, S\rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N},\ \langle l_2^{\mathbf{z}}, h\rangle = \langle f^c, h\rangle - (D^\theta(\eta)\nabla T_{\mathbf{z}}, \nabla h).$$

Индекс $\mathbf{z}$ у функций $T_{\mathbf{z}}$ и $C_{\mathbf{z}}$ выше означает, что $T_{\mathbf{z}}$ и $C_{\mathbf{z}}$ являются решениями задач (11) и (12) соответственно, отвечающих заданной паре $\mathbf{z} = (\eta, \mu)$.

Используя оценку (8) и оценку для $|D^\theta|$ в (4), мы заключаем, что $l_1 \in \mathcal{T}^*$, $l_2^{\mathbf{z}} \in \mathcal{C}^*$ для любого $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ и выполняются оценки

$$\|l_1\|_{\mathcal{T}^*} \leqslant M_{l_1} = \|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma\|\chi\|_{\Gamma_N},\ \|l_2^{\mathbf{z}}\|_{\mathcal{C}^*} \leqslant M_{l_2}^T = \|f^c\|_{\mathcal{C}^*} + D_{\max}^\theta\|T_{\mathbf{z}}\|_{1,\Omega}. \tag{13}$$

Кроме того, для каждой пары $\mathbf{z} = (\eta, \mu) \in Z$ билинейная форма $a_1^{\mathbf{z}} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, определенная в тождестве (11), непрерывна и коэрцитивна на $\mathcal{T}$ с константой $k_* = \delta_1 k_{\min}$, введенной в (5), причем

$$a_1^{\mathbf{z}}(S,S) \geqslant k_{\min}(\nabla S, \nabla S) \geqslant k_*\|S\|_{1,\Omega}^2 \ \forall\, S \in \mathcal{T},\ k_* = \delta_1 k_{\min}. \tag{14}$$

Из теоремы Лакса −Мильграма (см. о ней в [15, p. 10]) и оценок (13), (14) тогда следует, что для любой пары $\mathbf{z} \equiv (\eta,\mu) \in Z$ существует единственное решение $T \equiv T_{\mathbf{z}} \in \mathcal{T}$ задачи (11) и справедлива оценка

$$\|T\|_{1,\Omega} \leqslant M_T \equiv c_1 M_{l_1}\ (c_1 = 1/k_*). \tag{15}$$

Точно так же для каждой пары $\mathbf{z} \equiv (\eta,\mu) \in Z$ билинейная форма $a_2^{\mathbf{z}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, определенная в (12), непрерывна и коэрцитивна на $\mathcal{C}$ с константой $\lambda_* = \delta_2 \lambda_{\min}$, введенной в (6), причем

$$a_2^{\mathbf{z}}(h,h) \geqslant \lambda_{\min}(\nabla h, \nabla h) \geqslant \lambda_*\|h\|_{1,\Omega}^2 \ \forall h \in \mathcal{C},\ \lambda_* = \delta_2 \lambda_{\min}.$$

Из теоремы Лакса–Мильграма и второй оценки в (13) тогда следует, что для любой пары $\mathbf{z}\equiv(\eta,\mu)\in W$ существует единственное решение $C\equiv C_{\mathbf{z}}\in\mathcal{C}$ задачи (12) и справедлива с учетом (6) оценка

$$\|C\|_{1,\Omega}\leqslant M_C^T\equiv c_2(\|f\|_{\mathcal{C}^*}+D^\theta_{\max}\|T\|_{1,\Omega})\ (c_2=1/\lambda_*). \tag{16}$$

Введем выпуклое замкнутое множество K в Z формулой

$$K=\{(\eta,\mu)\in Z:\|\eta\|_{1,\Omega}\leqslant M_T=c_1M_{l_1},\ \|\mu\|_{1,\Omega}\leqslant M_C\equiv c_2(\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}+D^\theta_{\max}M_T)\}. \tag{17}$$

Из оценок (15)–(17) следует, что упомянутый выше оператор F отображает множество K в себя.

Осталось доказать, что оператор F компактен и непрерывен на множестве K, заданном в (17). Для этого возьмем произвольную последовательность $\mathbf{z}_n=(\eta_n,\mu_n)$, $n=1,2,...$ из K, слабо сходящуюся к элементу $\mathbf{z}=(\eta,\mu)\in K$. Можно считать, что

$$\eta_n\to\eta \text{ слабо в } H^1(\Omega),\ \text{ сильно в } L^4(\Omega) \text{ и п.в. в } \Omega \text{ при } n\to\infty,$$
$$\mu_n\to\mu \text{ слабо в } H^1(\Omega),\ \text{ сильно в } L^4(\Omega) \text{ и п.в. в } \Omega \text{ при } n\to\infty.$$

Пусть $\mathbf{y}=F(\mathbf{z})$. По определению оператора F, элемент $\mathbf{y}\equiv(T,C)\in K$ является решением задачи (11), (12), которая соответствует паре $\mathbf{z}=(\eta,\mu)$, а элемент $\mathbf{y}_n\equiv(T_n,C_n)\in K$ является решением задачи

$$a_1^{\mathbf{z}_n}(T_n,S)\equiv(k(\eta_n,\mu_n)\nabla T_n,\nabla S)=\langle l_1,S\rangle\ \forall S\in\mathcal{T}, \tag{18}$$
$$a_2^{\mathbf{z}_n}(C_n,h)\equiv(\lambda(\eta_n,\mu_n)\nabla C_n,\nabla h)=\langle l_2^{\mathbf{z}_n},h\rangle\equiv\langle l_2,h\rangle-(D^\theta(\eta_n)\nabla T_{\mathbf{z}_n},\nabla h)\ \forall h\in\mathcal{C}. \tag{19}$$

Она получается из задачи (11), (12), если заменить в ней элемент $\mathbf{z}=(\eta,\mu)$ на $\mathbf{z}_n=(\eta_n,\mu_n)$, а пару (T,C) на (T_n,C_n). Для доказательства непрерывности и компактности оператора F достаточно доказать, что $\mathbf{y}_n\to\mathbf{y}$ сильно в Z при $n\to\infty$ (или, что эквивалентно, $T_n\to T$, $C_n\to C$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $n\to\infty$). Для доказательства этого факта вычтем задачу (11), (12) для $\mathbf{y}\equiv(T,C)$ из задачи (18), (19) для $\mathbf{y}_n=(T_n,C_n)$. В результате мы получим две линейные задачи для разностей T_n-T и C_n-C:

$$\begin{gathered}a_1^{\mathbf{z}_n}(T_n-T,S)\equiv(k(\eta_n,\mu_n)\nabla(T_n-T),\nabla S)=\\=-((k(\eta_n,\mu_n)-k(\eta,\mu))\nabla T,\nabla S)\quad\forall S\in\mathcal{T},\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}a_2^{\mathbf{z}_n}(C_n-C,h)\equiv(\lambda(\eta_n,\mu_n)\nabla(C_n-C),\nabla h)=\\=-((\lambda(\eta_n,\mu_n)-\lambda(\eta,\mu))\nabla C,\nabla h)-((D^\theta(T_n)-D^\theta(T))\nabla T,\nabla h)-\\-(D^\theta(T_n)(\nabla T_n-\nabla T)\cdot\nabla T,\nabla h)\quad\forall h\in\mathcal{C}.\end{gathered} \tag{21}$$

Чтобы доказать стремление к нулю величин $\|T_n-T\|_{1,\Omega}$ и $\|C_n-C\|_{1,\Omega}$ при $n\to\infty$, достаточно доказать стремление к нулю правых частей задач (20), (21) и затем применить к каждой из задач (20), (21) теорему Лакса–Мильграма. Рассмотрим сначала задачу (20). В ее правой части присутствует одно слагаемое

$$-((k(\eta_n,\mu_n)-k(\eta,\mu))\nabla T,\nabla S)\quad\forall S\in\mathcal{T}. \tag{22}$$

Чтобы доказать сходимость к нулю слагаемого (22), заметим, что для изучения его поведения при $n\to\infty$ удобно воспользоваться теоремой Лебега о мажорантной сходимости (см. [16]). Рассуждая, как в [7], легко показываем с учетом непрерывности и ограниченности в $\mathbb{R}^2$ функции $k(\cdot,\cdot)$, вытекающей из условия **2.3**, что слагаемое (22) стремится к нулю при $n\to\infty$, а именно:

$$|((k(\eta_n,\mu_n)-k(\eta,\mu))\nabla T,\nabla S)|\equiv$$
$$\equiv\left|\int\limits_\Omega (k(\eta_n,\mu_n)-k(\eta,\mu))\nabla T\cdot\nabla S d\mathbf{x}\right|\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty\,\forall\, S\in\mathcal{T}.$$

Отсюда и из предыдущих рассуждений вытекает

$$\|T_n-T\|_{1,\Omega}\to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{23}$$

По аналогичной схеме доказывается с помощью тождества (21), содержащего в правой части три слагаемых,

$$\|C_n-C\|_{1,\Omega}\to 0 \text{ при }\ n\to\infty.$$

Действительно, применяя дважды теорему Лебега о мажорантной сходимости, имеем последовательно для первых двух слагаемых в правой части (21),

$$|((\lambda(\eta_n,\mu_n)-\lambda(\eta,\mu))\nabla C,\nabla h)|\equiv$$
$$\equiv\left|\int\limits_\Omega (\lambda(\eta_n,\mu_n)-\lambda(\eta,\mu))\nabla C\cdot\nabla h dx\right|\to 0 \text{ при }\ n\to\infty\ \forall h\in\mathcal{C},$$
$$|((D^\theta(T_n)-D^\theta(T))\nabla T,\nabla h)|=$$
$$\left|\int\limits_\Omega (D^\theta(T_n)-D^\theta(T))\nabla T\cdot\nabla h dx\right|\to 0 \text{ при } n\to\infty\ \forall h\in\mathcal{C}.$$

Кроме того, применяя неравенство Гельдера, оценку (7) и учитывая (23), выводим для последнего слагаемого в правой части (21):

$$|(D^\theta(T_n)(\nabla T_n-\nabla T)\cdot\nabla C,h)|\leqslant$$
$$D^\theta_{\max}M_C\|\nabla T_n-\nabla T\|_\Omega\|\nabla h\|_\Omega\to 0 \text{ при }\ n\to\infty\ \forall h\in\mathcal{C}.$$

Тем самым мы доказали непрерывность и компактность оператора F на множестве K.

Поэтому в силу теоремы Шаудера оператор F имеет неподвижную точку $\mathbf{y}\equiv(T,C)=F(\mathbf{z})\in K$, которая по построению является искомым слабым решением задачи (1)–(3), причем справедливы следующие оценки для (T,C):

$$\|T\|_{1,\Omega}\leqslant M_T=(1/\delta_1 k_{\min})(\|f\|_{\mathcal{T}^*}+\gamma\|\chi\|_{\Gamma_N}),$$
$$\|C\|_{1,\Omega}\leqslant M_C=(1/\delta_2\lambda_{\min})(\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}+D^\theta_{\max}M_T). \tag{24}$$

Здесь M_T и M_C — константы, зависящие от норм исходных данных f, f^c, χ и старших коэффициентов $k_{\min}$, $\lambda_{\min}$ и $D^\theta_{\max}$. Таким образом, нами доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* **2.1**–**2.3**. *Тогда существует слабое решение* $(T,C)\in\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ *задачи 1, для которого справедливы оценки* (24). *Здесь* M_T *и* M_C *— непрерывные неотрицательные функции норм* $\|f\|_{\mathcal{T}^*}$, $\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$ *и коэффициентов* $k_{\min}$, $\lambda_{\min}$, $D^\theta_{\max}$, *определенные в правых частях формул* (24).

По аналогичной схеме может быть исследована краевая задача для двухдиффузионной модели ТМП, учитывающей эффект Дюфура (вместо эффекта Соре́). Для этой модели соотношения (3) не изменяются, а (1), (2) принимают вид

$$-\mathrm{div}(k(T,C)\nabla T)-\mathrm{div}(D^\delta(C)\nabla C)=f \text{ в } \Omega, \tag{1a}$$

$$-\mathrm{div}(\lambda(T,C)\nabla C)=f^c \text{ в } \Omega, \tag{2a}$$

которым отвечают интегральные тождества

$$(k(T,C)\nabla T,\nabla S)+(D^\delta(C)\nabla C,\nabla S)=\langle f,S\rangle+(\chi,S)_{\Gamma_N}\ \forall\, S\in\mathcal{T}, \tag{13a}$$

$$(\lambda(T,C)\nabla C,\nabla h)=\langle f^c,h\rangle\ \forall\, h\in\mathcal{C}. \tag{14a}$$

На задачу (1a), (2a), (3) будем ссылаться как на задачу 2, а на пару $(T,C)\in\mathcal{T}\times\mathcal{C}$, удовлетворяющую (13a), (14a), как на слабое решение задачи 2. Для задачи 2 справедлива следующая теорема, которая доказывается так же, как и теорема 1.

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям* **2.1**–**2.3** $D^\delta\in C(\mathbb{R})$, $|D^\delta(\tau)|\leqslant D^\delta_{\max}$ $\forall\tau\in\mathbb{R}$. *Тогда существует слабое решение* $(T,C)\in\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ *задачи 2, для которого справедливы следующие оценки:*

$$\|C\|_{1,\Omega}\leqslant M_C\equiv(1/\delta_2\lambda_{\min})\|f\|_{\mathcal{C}^*},$$

$$\|T\|_{1,\Omega}\leqslant M_T\equiv(1/\delta_1 k_{\min})(\|f\|_{\mathcal{T}^*}+\gamma\|\chi\|_{\Gamma_N}+D^\delta_{\max}M_C). \tag{25}$$

Замечание 1. Анализ оценок (24), (25) позволяет сделать интересные выводы о характере зависимости норм $\|T\|_{1,\Omega}$ и $\|C\|_{1,\Omega}$ решений (T,C) задач 1 и 2 от коэффициентов переноса $k_{\min}$, $\lambda_{\min}$, $D^\theta_{\max}$ и $D^\delta_{\max}$. Видно из (24), (25), что если обе нормы характеризуются обратно пропорциональной зависимостью от $k_{\min}$ и $\lambda_{\min}$, то зависимость от $D^\theta_{\max}$ и $D^\delta_{\max}$ является весьма специфичной: в частности, для задачи 1 норма $\|C\|_{1,\Omega}$ линейно растет с ростом $D^\theta_{\max}$, т.е. ведет себя подобно зависимости нормы $\|C\|_{1,\Omega}$ от нормы правой части f^c. Это означает, что второе диффузионное слагаемое в уравнении (2), содержащее D^θ, действует на решение как нелинейная правая часть. Аналогичной линейной зависимостью нормы $\|T\|_{1,\Omega}$ от параметра $D^\delta_{\max}$ обладает решение задачи 2. Указанные факты являются следствиями структур рассматриваемых нами моделей термодиффузии и концентрационной диффузии.

4. Доказательство условной единственности решения задачи 1

Для доказательства единственности решения задачи 1 мы предположим, что $\chi=0$, а коэффициент $k(\cdot)$ (либо $\lambda(\cdot)$) зависит только от T (либо только от C). Предположим также, что функции $k(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ и $D^\theta(\cdot)$ обладают следующими свойствами:

4.1. $k(\cdot)\in C^1(\mathbb{R})$, $\lambda(\cdot)\in C^1(\mathbb{R})$, $D^\theta(\cdot)\in C^1(\mathbb{R})$,

$$0 < k_{\min} \leqslant k(t),\ 0 < \lambda_{\min} \leqslant \lambda(t)\ \forall (t) \in \mathbb{R},$$
$$|k'(t)| \leqslant k'_{\max} < \infty,\ \ |\lambda'(t)| \leqslant \lambda'_{\max} < \infty,\ |D^{\theta'}(t)| \leqslant D^{\theta'}_{\max} < \infty\ \forall (t) \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

4.2. Функции $k'(\cdot)$, $\lambda'(\cdot)$, $D^{\theta'}(\cdot)$ так же, как и $k(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$, $D^\theta(\cdot)$, непрерывны по Липшицу и для них выполняются оценки

$$|k(t_1) - k(t_2)| \leqslant L_k|t_1 - t_2|,\quad |k'(t_1) - k'(t_2)| \leqslant L_{k'}|t_1 - t_2|\quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$
$$|\lambda(t_1) - \lambda(t_2)| \leqslant L_\lambda|t_1 - t_2|\quad |\lambda'(t_1) - \lambda'(t_2)| \leqslant L_{\lambda'}|t_1 - t_2|\quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$
$$|D^\theta(t_1) - D^\theta(t_2)| \leqslant L_d|t_1 - t_2|,\quad |D^{\theta'}(t_1) - D^{\theta'}(t_2)| \leqslant L_{d'}|t_1 - t_2|\quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

4.3. $\Gamma\in C^{1,1}$, $\overline{\Gamma}_D\cap\overline{\Gamma}_N=\emptyset$, $f\in L^2(\Omega)$, $f^c\in L^2(\Omega)$.

В (26), (27) $k'_{\max}$, $\lambda'_{\max}$, $D^{\theta'}_{\max}$, L_k, $L_{k'}$, L_λ, L_λ, L_d, $L_{d'}$ — некоторые положительные константы.

Введем в пространстве $H^2(\Omega)$ два подпространства

$$\begin{gathered} H^2_t(\Omega) = \{T \in H^2(\Omega) : T|_{\Gamma_D} = 0,\ \partial T/\partial n|_{\Gamma_N} = 0\}, \\ H^2_c(\Omega) = \{C \in H^2(\Omega) : C|_\Gamma = 0\}. \end{gathered} \tag{28}$$

Как и в [7], доказательство единственности решения задачи 1 будет основываться на свойстве эквивалентности стандартной нормы $\|h\|_{2,\Omega}$ и L^2-нормы $\|\Delta h\|_\Omega$ оператора Лапласа на функциях h, принадлежащих одному из подпространств $H^2_t(\Omega)$ или $H^2_c(\Omega)$ в (28). Указанное свойство эквивалентности мы приведем в виде следующей леммы (см. [7]).

Лемма 1. *Пусть в дополнение к условию* ***2.1*** *выполняются условия* ***4.3****. Тогда норма* $\|h\|_{2,\Omega}$ *в подпространствах* $H^2_t(\Omega)$ *и* $H^2_c(\Omega)$*, определенных в* (28)*, эквивалентна норме* $\|\Delta h\|_\Omega$*, т.е. справедливы оценки:*

$$\|\Delta h\|_\Omega \leqslant \widetilde{C}_1\|h\|_{2,\Omega},\ \|h\|_{2,\Omega} \leqslant \widetilde{C}_2\|\Delta h\|_\Omega\quad \forall h \in H^2_t(\Omega) \cup H^2_c(\Omega). \tag{29}$$

Здесь и далее $\widetilde{C}_i$, $i=1,2,...$ *— положительные константы, зависящие от* Ω.

Наряду с оценками (29) ниже мы будем также использовать оценки:

$$\|h\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_3\|h\|_{2,\Omega},\ \ 1 \leqslant r < \infty,\ \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_4\|h\|_{2,\Omega}\quad \forall h \in H^2(\Omega), \tag{30}$$

$$\begin{gathered} \|\nabla h\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_5\|h\|_{2,\Omega}\quad \forall h \in H^2(\Omega), \\ \|\nabla h\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_6\|\Delta h\|_\Omega\quad \forall h \in \widetilde{H}^2(\Omega),\ \widetilde{C}_6 = \widetilde{C}_2\widetilde{C}_5, \end{gathered} \tag{31}$$

вытекающие из соответствующих теорем вложения и оценок (29).

Введем в пространстве $H^2_t(\Omega)\times H^2_c(\Omega)$ шар:

$$B_\varepsilon = \{(T, C) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) : \|T\|_{2,\Omega} < \varepsilon,\ \|C\|_{2,\Omega} < \varepsilon\}.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения* ***2.1****,* ***4.1****–****4.3*** *и* $\chi = 0$*. Существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что если существует слабое решение* (T, C) *задачи 2 такое, что* $(T, C) \in B_\varepsilon$*, то это решение единственно в шаре* B_ε*.*

Доказательство. Предположим, что существует два слабых решения (T_i,C_i), $i=1,2$, задачи (9), (10) таких, что $(T_i,C_i)\in B_\varepsilon$ для некоторого ε. Для доказательства теоремы 3 достаточно доказать, что при малых значениях ε эти решения совпадают.

Сначала, на первом этапе доказательства, мы записываем интегральные тождества (9), (10) для каждого из решений (T_i,C_i), $i=1,2$, вычитаем первое из второго и полагаем в результирующих соотношениях

$$S=T=T_1-T_2\in H_t^2(\Omega),\qquad h=C=C_1-C_2\in H_c^2(\Omega).$$

Рассуждая, как в [7], мы приходим после некоторых преобразований к соотношениям

$$\begin{gathered}(k(T_1)\Delta T,\Delta T)=-(k'(T_1)\nabla T_1\cdot\nabla T,\Delta T)-(((k'(T_1)-k'(T_2))\nabla T_1\cdot\nabla T_2,\Delta T)-\\ -(k'(T_2)\nabla T\cdot\nabla T_2,\Delta T)-((k(T_1)-k(T_2))\Delta T_2,\Delta T),\end{gathered}\tag{32}$$

$$\begin{gathered}(\lambda(C_1)\Delta C,\Delta C)=-(\lambda'(C_1)\nabla C_1\cdot\nabla C,\Delta C)-(((\lambda'(C_1)-\lambda'(C_2))\nabla C_1\cdot\nabla C_2,\Delta C)-\\ -(\lambda'(C_2)\nabla C\cdot\nabla C_2,\Delta C)-((\lambda(C_1)-\lambda(C_2))\Delta C_2,\Delta C)-\\ -(D^\theta(T_1)\Delta T,\Delta C)-(D^{\theta'}(T_1)\nabla T_1\cdot\nabla T,\Delta C)-\\ -(((D^{\theta'}(T_1)-D^{\theta'}(T_2))\nabla T_1\cdot\nabla T_2,\Delta C)-(D^{\theta'}(T_2)\nabla T\cdot\nabla T_2,\Delta C)-\\ -((D^\theta(T_1)-D^\theta(T_2))\Delta T_2,\Delta C).\end{gathered}\tag{33}$$

Следующий этап состоит в том, чтобы из соотношений (32), (33) вывести два неравенства, содержащие в левых частях старшие слагаемые $k_{\min}\|\Delta T\|^2_\Omega$ и $\lambda_{\min}\|\Delta C\|^2_\Omega$ для T и C, а в правых частях — оценки сверху соответствующих слагаемых, присутствующих в правых частях (32), (33). Чтобы вывести их, достаточно применить очевидные по определению $k_{\min}$ и $\lambda_{\min}$ оценки

$$(k(T_1)\Delta T,\Delta T)\geqslant k_{\min}\|\Delta T\|^2_\Omega\quad\text{и}\quad(\lambda(C_1)\Delta C,\Delta C)\geqslant\lambda_{\min}\|\Delta C\|^2_\Omega$$

к левым частям (32) и (33), а для каждого из слагаемых в правых частях (32), (33) применить одну из оценок (26), (27) либо (29)–(31). В результате мы приходим к неравенствам

$$k_{\min}\|\Delta T\|^2_\Omega\leqslant a\|\Delta T\|^2_\Omega,\tag{34}$$

$$\lambda_{\min}\|\Delta C\|^2_\Omega\leqslant b\|\Delta C\|^2_\Omega+d\|\Delta T\|_\Omega\|\Delta C\|_\Omega.\tag{35}$$

Здесь константа a, зависящая от T_1,T_2, константа b, зависящая от C_1, C_2, и константа d, зависящая от T_1,T_2, определяются формулами

$$\begin{gathered}a=k'_{\max}\widetilde{C}_5\widetilde{C}_6\|T_1\|_{2,\Omega}+L_{k'}\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4\widetilde{C}_6^2\|T_1\|_{2,\Omega}\|T_2\|_{2,\Omega}+\\ +k'_{\max}\widetilde{C}_5\widetilde{C}_6\|T_2\|_{2,\Omega}+L_k\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4\|\Delta T_2\|_\Omega,\end{gathered}\tag{36}$$

$$\begin{gathered}b=\lambda'_{\max}\widetilde{C}_5\widetilde{C}_6\|C_1\|_{2,\Omega}+L_{\lambda'}\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4\widetilde{C}_6^2\|C_1\|_{2,\Omega}\|C_2\|_{2,\Omega}+\\ +\lambda'_{\max}\widetilde{C}_5\widetilde{C}_6\|C_2\|_{2,\Omega}+L_\lambda\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4\|\Delta C_2\|_\Omega,\end{gathered}\tag{37}$$

$$\begin{gathered}d=(D_{\max}+D'_{\max}\tilde{C}_5\tilde{C}_6\|T_1\|_{2,\Omega}+L_{d'}\tilde{C}_2\tilde{C}_4\tilde{C}_6^2\|T_1\|_{2,\Omega}\|T_2\|_{2,\Omega}+\\ +D'_{\max}\tilde{C}_5\tilde{C}_6\|T_2\|_{2,\Omega}+L_d\tilde{C}_2\tilde{C}_4\|\Delta T_2\|_{2,\Omega}).\end{gathered}\tag{38}$$

Отметим, что введенные в (36)–(38) константы a, b и d корректно определены в силу условий **4.1** и **4.2**. Предположим теперь, что константы a и b настолько малы, что выполняются условия

$$a < k_{\min},\ b < \lambda_{\min}. \tag{39}$$

Тогда из (34), (35) последовательно выводим, что $\Delta T{=}0$ и $\Delta C{=}0$. Так как $T \in H^2_t(\Omega)$, $C \in H^2_c(\Omega)$, то из второй оценки в (29) следует, что $T=0$, $C=0$ и, следовательно, $T_1=T_2$, $C_1=C_2$. Анализ формул (36), (37) для a и b показывает, что условия (39) выполняются, если каждая из троек (T_i,C_i), $i=1,2$, принадлежит B_ε, где ε — достаточно малое число. Теорема доказана.

Заключение

В работе исследованы краевые задачи для стационарных моделей диффузионного тепломассопереноса с переменными коэффициентами, учитывающих эффект Соре́ (либо эффект Дюфура). Доказана глобальная разрешимость указанных краевых задач, локальная единственность слабых решений, выведены апприорные оценки решений. Показано, в частности, для задачи 1, что оценка H^1-нормы температуры не зависит от модуля коэффициента Соре́, тогда как оценка для H^1-норм концентрации линейно растет с его ростом. Аналогичная ситуация наблюдается и для задачи 2. Нужно отметить, что не все важные вопросы, касающиеся установления свойств решений задач 1 и 2, были детально исследованы в этой работе. В частности, мы не рассматривали случай, когда на границах Γ_D и Γ заданы неоднородные условия Дирихле для T и C, а также не занимались установлением достаточных условий на исходные данные, обеспечивающих физический смысл изучаемой модели. Кроме того, мы ограничились доказательством единственности слабого решения в частном случае. Исследованию указанных вопросов и ряда других важных свойств решений задачи 1 авторы предполагают посвятить отдельную работу.

Список литературы

[1] Dias H., Galiano G., “Existence and uniqueness of solutions to the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion”, *Topology Methods in Nonlinear Analysis*, **11**, (1998).

[2] Lorca S. A., Boldrini J. L., “The initial value problem for a generalized Boussinesq model”, *Nonlinear Anal*, **1999**:457.

[3] Гончарова О. Н., “Единственность решения двумерной нестационарной задачи для уравнений конвекции с вязкостью, зависящей от температуры”, *Дифференц. уравнения*, **2002**:2, 234–242.

[4] Feireisl E., Málek J., “On the Navier-Stokes equations with temperature dependent transport coefficients”, *Differ. Equ. Nonlinear Mech*, 2006, No Art. ID 90616.

[5] Lorca S. A., Boldrini J. L., “Stationary solutions for generalized Boussinesq models”, *J. Diff. Eq.*, **124**:389, (1996).

[6] Alekseev G. V., Soboleva O. V., “Inhomogeneous boundary value problems for the generalized Boussinesq model of mass transfer”, *Mathematics*, **12**:391, (2024).

[7] Alekseev G. V., Soboleva O. V., “Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature”, *Phil. Trans. R. Soc.*, **A 382: 20230301**, (2024).

[8] Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О., *Симметрии неклассических моделей гидродинамики*, Наука, Новосибирск, 2003.

[9] Рыжков И. И., *Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость*, изд-во СО РАН, Новосибирск, 2013.

[10] Андреев В. К., Рыжков И. И., “Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:4, (2005), 508–517.

[11] Пухначев В. В., “Многомерные точные решения уравнений нелинейной диффузии”, *ПМТФ*, **36**:2, (1995), 23–31.

[12] Степанова И. В., “Симметрии в уравнениях тепломассопереноса в вязких жидкостях (обзор)”, *Вестник Омского университета*, **24**:2, (2019), 51–65.

[13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., “Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 томах. Т. VI”, *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.

[14] Алексеев Г. В., *Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и гидродинамики*, Научный мир, М., 2010.

[15] Girault V, Raviart P. A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer, Berlin, Germany, 1986.

[16] Serfozo R., “Convergence of Lebesque Integrals with Varying Measures”, *Sankhyā: The Indian J. Stat*, **44**, (1982), 380–402.

Поступила в редакцию
23 октября 2025 г.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (проект № 075-00459-25-00).
Исследование первого автора также выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

Alekseev G. V.[1,2], *Soboleva O. V.*[1] Analysis of boundary value problems for stationary models of diffusive heat and mass transfer with variable transport coefficients. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2026. V. 26. No 1. P. 3–13.

[1] Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
[2] Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

Global solvability of boundary value problems for stationary models of diffusive heat and mass transfer, taking into account the Soret or Dufour effect, is proved. A priori estimates for the solution (temperature and concentration) are derived and their dependence on all transport coefficients entering the considered models is analyzed. A special character of the dependence of these quantities on the moduli of the Soret or Dufour coefficients is established. A theorem on local uniqueness of a weak solution possessing additional smoothness from the space $H^2(\Omega)$ is proved.

Key words: *differential equations, heat and mass transfer, boundary value problem, variable coefficients, solvability, uniqueness, Soré or Dufour coefficients.*