

УДК 517.44
MSC2020 44A12

© Д. С. Аниконов¹, В. Г. Назаров²

Численные аспекты одной формулы обращения преобразования Радона

Работа посвящена численному анализу одного аспекта теории преобразования Радона в нечетномерном евклидовом пространстве. Указанный аспект состоит в том, что известная формула обращения, доказанная для гладких функций, оказывается справедливой и для разрывных функций во всех точках непрерывности подынтегральной функции при выполнении дополнительного условия. Это условие, названное нами псевдовыпуклостью множества точек непрерывности, совершенно необременительно для многих математических моделей теории зондирования. Вместе с тем оно существенно расширяет возможности практического использования теоретических результатов. Поэтому представляется целесообразным проверить работоспособность численного алгоритма реконструкции, основанного на упомянутой формуле. Проведенное в работе тестирование показало достаточно хорошее соответствие теоретических и компьютерных результатов.

Ключевые слова: *преобразование Радона, интегральная геометрия, зондирование, индикатор, разрывные функции, численный эксперимент.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202602>

Введение

Преобразование Радона определяется как совокупность интегралов от функции многих переменных по гиперплоскостям в конечномерном евклидовом пространстве. Оно широко используется в теории гиперболических дифференциальных уравнений и еще более значимо в теории обратных задач для уравнений математической физики. Основным вопросом является проблема нахождения подынтегрального выражения по известным интегралам. В более широком толковании можно задачу ставить для определения только части неизвестной информации. Например, можно искать только поверхности разрывов подынтегральной функции.

Не ставя себе задачу привести подробный обзор теории преобразования Радона, укажем прежде всего отдельные работы основоположников, таких как Р. Курант [1], Ф. Йон [2], И. М. Гельфанд [3]. Упомянем также родственные исследования

¹ Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4.

² Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

Электронная почта: anik@math.nsc.ru (Д. С. Аниконов), naz@iam.dvo.ru (В. Г. Назаров).

математической школы М. М. Лаврентьева и В.Г. Романова, посвященные обратным задачам для уравнений математической физики [4,5]. Вообще, имеется значительное количество исследований, посвященных единственности обращения преобразования Радона при довольно общих предположениях. К ним можно отнести, например, работы [6–12]. Однако известные нам формулы, удобные для построения численных алгоритмов, доказаны только для гладких функций, что несколько снижает их прикладную ценность. Некоторое представление о проведенных исследованиях можно получить из списка работ [3–13]. Среди областей применения результатов можно указать такие направления теории и практики зондирования, как сейсморазведка, гидролокация, электронная микроскопия, геофизическое картографирование, дефектоскопия и томография. При этом авторы использовали преимущественно численные методы, применяемые и для разрывных функций. В следующем пункте мы тестируем наш алгоритм реконструкции разрывной подынтегральной функции, который сводится к использованию формулы обращения и к визуализации полученных результатов.

1. Необходимые сведения

Настоящая работа основана на содержании статьи [14], посвященной теоретическому исследованию проблемы обращения преобразования Радона в евклидовом пространстве.

Мы используем следующие обозначения: E_n , $n \geq 3$, — n -мерное евклидово пространство, ∂T — граница множества T ; $T \subset E_n$; Ω — единичная сфера в E_n ; ω — точка сферы Ω ; Δ_x — оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$. В пространстве E_n рассматривается ограниченная область G , содержащая непересекающиеся подобласти $G_i, i = 1, \dots, l$, так что для объединения G_0 областей G_i верно равенство $\overline{G_0} = \overline{G}$. Легко увидеть, что ∂G_0 совпадает с объединением поверхностей $\partial G_i, i = 1, \dots, l$. Предполагается что лебеговская n -мерная мера поверхности ∂G_0 равна нулю. Гиперплоскости в E_n обозначаем $Y(\omega, p) = \{y : y \in E_n, y \cdot \omega = p\}, p \in R^1$.

Рассматриваются функции $\lambda(y)$, $y \in E_n$, непрерывные по Гельдеру в каждой области $G_i, i = 1, \dots, l$ и равные нулю вне области G . Как видно такие функции могут иметь разрывы в точках множества ∂G_0 .

Преобразование Радона записывается в форме следующего поверхностного интеграла по гиперплоскости $Y(\omega, p)$:

$$[R\lambda](\omega, p) = \int_{y \cdot \omega = p} \lambda(y) d_y \sigma, \quad x \in E_n, \omega \in \Omega. \quad (1)$$

Кроме основного базиса будем использовать сферические углы $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ для представления ω :

$$\omega(\varphi) = (\omega_1(\varphi), \dots, \omega_n(\varphi)), \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi), \quad \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \in [0, \pi], \quad (2)$$

причем нумерация углов выбрана так, чтобы $\omega_n = \cos \varphi_{n-1}$.

Будем говорить, что подмножество Ω_0 сферы Ω есть множество меры нуль на сфере, если при отображении $\omega(\varphi)$, указанном в (2), оно является образом множества нулевой меры точек φ в E_{n-1} . Назовем множество G_0 псевдовыпуклым, если для $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$, т.е. для почти всех $\omega \in \Omega$ любая гиперплоскость $Y(\omega, p)$ пересекает множество ∂G_0 по множеству нулевой меры с мерой пространства E_{n-1} , т.е. $\mu_{n-1}(Y(\omega, p) \cap \partial G_0) = 0$. При сделанных ограничениях в [14] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $n = 2m + 1$, $m = 1, \dots$, G_0 — псевдовыпуклое множество. Тогда справедливо равенство

$$(\Delta_x)^m \int_{\Omega} [R\lambda](\omega, x \cdot \omega) d\omega = (-1)^m 2(2\pi)^{2m} \lambda(x), \quad x \in E_n \setminus \partial G_0. \quad (3)$$

Интересно отметить, что формула (3) верна для почти всех x и в этом состоит ее единственное отличие от классической формулы обращения в [2], доказанной только для гладких функций $\lambda(y)$. Иначе говоря, если иметь в виду проблемы зондирования, то довольно значимое обобщение получено нами за счет введения незначительного дополнительного ограничения о псевдовыпуклости множества G_0 .

2. Численные эксперименты

При проведении численных экспериментов мы считали, что область G есть единичный шар в E_3 с центром в начале координат. $G_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : |x_k| < 0.2, k = 1, 2, 3\}$ — куб с центром в начале координат, $G_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : |x_k - c_k| < 0.2, k = 1, 2, 3\}$ — шар радиусом 0.2 с центром в точке $c = (c_1, c_2, c_3) = (0.4, 0.4, 0)$. Ясно, что области G_1 и G_2 при этом находятся на положительном расстоянии друг от друга и от границы области G . В качестве функции $\lambda(y)$ была взята характеристическая функция множества $G_1 \cup G_2$.

Каждый численный эксперимент естественным образом распадался на два этапа. На первом этапе с использованием формулы (1) нами находилось прямое преобразование Радона $[R\lambda](\omega, p)$ функции $\lambda(y)$ в замыкании \bar{G} единичного шара, содержащем область G . Для этого \bar{G} покрывалось сеткой, узлы которой задавались в сферической системе координат (r, θ, φ) в \mathbb{R}^3 . При этом $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $r = |p|$. Поскольку диапазоны изменения переменных (r, θ, φ) заметно отличаются, то для повышения эффективности вычислений было введено несколько независимых целочисленных параметров: N_r для переменной r , N_θ для θ , N_φ для φ и параметр N_y для численного интегрирования по плоскости $y \cdot \omega = p$. Число сеточных узлов по r , θ , φ равнялось соответственно $(N_r + 1)$, $(N_\theta + 1)$ и N_φ . Таким образом, преобразование Радона $[R\lambda](\omega, p)$ находилось нами в узлах сетки и представляло собой набор чисел $[R\lambda](\theta_i, \varphi_j, r_k)$, $1 \leq i \leq (N_\theta + 1)$, $1 \leq j \leq N_\varphi$, $1 \leq k \leq (N_r + 1)$, который выводился в ходе работы компьютерной программы в виде файла.

На втором этапе численного эксперимента этот файл использовался как исходные данные для нахождения восстановленного значения функции $\lambda(x)$ с помощью

формулы [2], которую при $m = 1$ мы перепишем в виде

$$\lambda(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta_x \int_{\Omega} [R\lambda](\omega, x \cdot \omega) d\omega. \quad (4)$$

Основная цель численного эксперимента состояла в том, чтобы выяснить, насколько хорошо восстанавливается функция $\lambda(y)$.

При вычислении $[R\lambda](\theta_i, \varphi_j, r_k)$ для каждой фиксированной тройки (i, j, k) нужно выполнять численное интегрирование по плоскости $y \cdot \omega = p$, которая при изменении любого из индексов i, j, k меняет свое положение в пространстве E_3 . Для этого интегрирования при каждом изменении положения плоскости $y \cdot \omega = p$ на ней по-новому устанавливалась равномерная квадратная сетка размером 2×2 , содержащая $(2N_y + 1) \times (2N_y + 1)$ узлов, в которых нами находились значения $\lambda(y)$, а уже затем вычислялось значение интеграла для заданной тройки $(\theta_i, \varphi_j, r_k)$. В итоге размер «полной» сетки, использованной на первом этапе работы, составлял $(N_r + 1) \times (N_\theta + 1) \times N_\varphi \times (2N_y + 1) \times (2N_y + 1)$. Отсюда видно, что при одновременном увеличении в 2 раза каждого из указанных четырех (независимых) параметров время работы программы возрастает примерно в $2^5 = 32$ раза.

Таким образом, при вычислении прямого и обратного преобразований Радона мы использовали как декартовы, так и сферические координаты в E_3 и несколько различных вычислительных сеток.

При вычислении обратного преобразования (формула (4)) вводился пятый целочисленный параметр N_l и строилась равномерная кубическая сетка размером $(N_l + 1) \times (N_l + 1) \times (N_l + 1)$, покрывающая куб $K = \{x = (x_1, x_2, x_3) : |x_k| \leq 1; k = 1, 2, 3\}$. Для узлов этой сетки $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)})$ и значений $\omega^{(q)} = (\theta_i, \varphi_j)$ сначала нами находилось произведение $\omega^{(q)} \cdot x^{(s)}$, а затем r_k и r_{k+1} такие, что $r_k \leq \omega^{(q)} \cdot x^{(s)} \leq r_{k+1}$, и после этого путем линейной интерполяции вычислялись $[R\lambda](\omega^{(q)}, \omega^{(q)} \cdot x^{(s)})$ и

$$\int_{\Omega} [R\lambda](\omega^{(q)}, \omega^{(q)} \cdot x^{(s)}) d\omega.$$

Затем численно вычислялся лапласиан от этого интеграла.

Далее в виде картинок и графиков приводятся некоторые результаты таких вычислений в плоскости $x_3 = 0$. Через $\lambda_1(x)$ будем обозначать функцию, полученную в результате реконструкции характеристической функции $\lambda(y)$, так что в общем случае $\lambda_1(x) \neq \lambda(y)$. Было проведено несколько серий численных экспериментов при различных значениях сеточных параметров $N_r, N_\theta, N_\varphi, N_y, N_l$. Часть полученных результатов представлена на рисунках.

На рис. 1(a) в графической форме показан точный вид функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3 = 0$. На рис. 1(b) — восстановленное изображение $\lambda_1(x)$ функции $\lambda(y)$ в плоскости $x_3 = 0$ при $N_r = 60, N_\theta = 60, N_\varphi = 60, N_y = 120, N_l = 60$. За пределами включений довольно отчетливо проступают бледно серые размытые полосы имеющие в основном радиальную направленность. Они вызваны вычислительными ошибками при интегрировании и последующим численным дифференцированием при вычислении лапласиана с шагом $2/N_l = 1/30$. На рис. 1(c) — восстановленное изображение $\lambda_1(x)$ при вычислении лапласиана с шагом $1/15$.

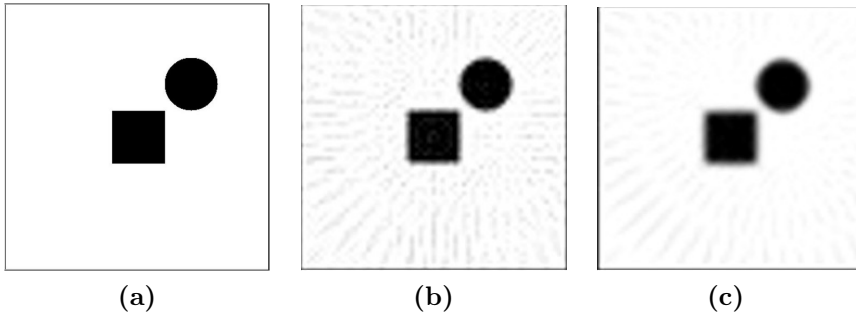


Рис. 1. (a) — точный вид функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3=0$ в пределах квадрата $|x_k| \leq 1$; $k=1,2,3$. (b) — восстановленное изображение при $N_r=60$, $N_\theta=60$, $N_\varphi=60$, $N_y=120$, $N_l=60$. Лапласиан вычислялся в узлах сетки с шагом $1/30$. (c) — восстановленное изображение; лапласиан вычислялся в узлах сетки с шагом $1/15$.

На рис. 2(a) при $N_r=60$, $N_\theta=60$, $N_\varphi=60$, $N_y=120$, $N_l=60$ представлен график функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3=0$ вдоль прямой $x_1=0$, а на рис. 2(b) — вдоль прямой $x_1=0.4$. Острый пик на рис. 2(a) в точке $x_1=0$ вызван вычислительными ошибками и последующим двойным дифференцированием с шагом $1/30$.

На рис. 3 показаны те же графики для функции $\lambda_1(x)$. Лапласиан как и раньше вычисляется в узлах сетки $61 \times 61 \times 61$, но теперь с шагом $1/15$.

За счет увеличения вдвое шага при дифференцировании фон за пределами всех включений заметно очистился от «вычислительного шума», а острый пик на рис. 2(a) стал значительно меньше. В то же время можно заметить, что контрастность границ включений на рис. 1(c) несколько ниже, чем на рис. 1(b). Кроме этого, вдвое увеличилась ширина «переходной зоны» между значениями $\lambda_1(x) \approx 0$ и $\lambda_1(x) \approx 1$.

Отметим, что все реальные картинки и графики на рис. 1, 2, 3 были получены

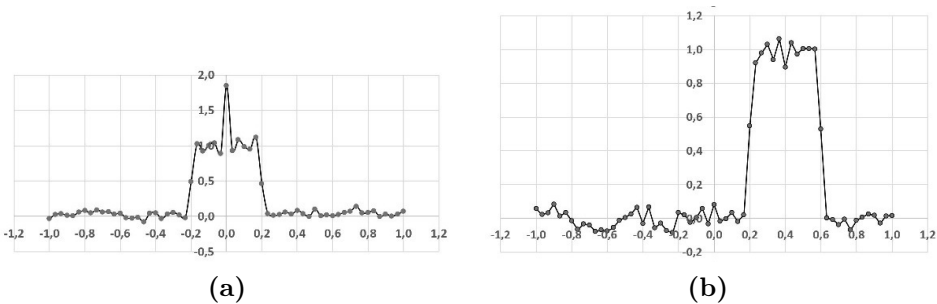


Рис. 2. (a) — график функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3=0$ вдоль прямой $x_1=0$. (b) — график функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3=0$ вдоль прямой $x_1=0.4$. Острый пик на рис. 2(a) в точке $x_1=0$ вызван вычислительными ошибками и последующим двойным дифференцированием с шагом $1/30$.

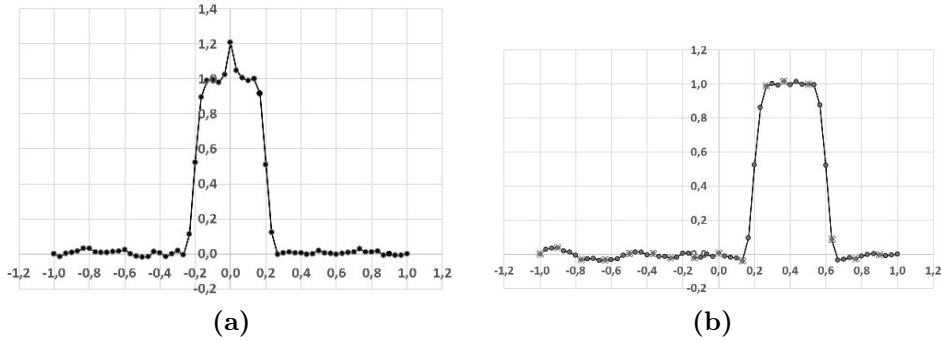


Рис. 3. Здесь показаны те же графики, что и на рис. 2. Лапласиан, как и раньше, вычислялся в узлах сетки $61 \times 61 \times 61$, но теперь с шагом $1/15$.

при значении полного числа узлов

$$N_{t1} = (N_r + 1) \times (N_\theta + 1) \times N_\varphi \times (2N_y + 1) \times (2N_y + 1) \approx 3.3 \cdot 10^9.$$

На рис. 4 картинка и графики получены при $N_r = 40$, $N_\theta = 80$, $N_\varphi = 120$, $N_y = 80$, $N_l = 40$. Полное число узлов при этом составило

$$N_{t2} = (N_r + 1) \times (N_\theta + 1) \times N_\varphi \times (2N_y + 1) \times (2N_y + 1) \approx 2.6 \cdot 10^9.$$

Несмотря на то что число N_{t2} меньше числа N_{t1} , качество графиков на рис. 4 на наш взгляд оказалось несколько лучше, чем качество графиков на рис. 3, поскольку «вычислительный шум» за пределами включений уменьшился и на рис. 3(a) он стал практически невидим. Таким образом, увеличение значений параметров N_θ и N_φ по сравнению с N_r в 2 и 3 раза соответственно и увеличение шага при дифференцировании в лапласиане улучшило качество изображений.

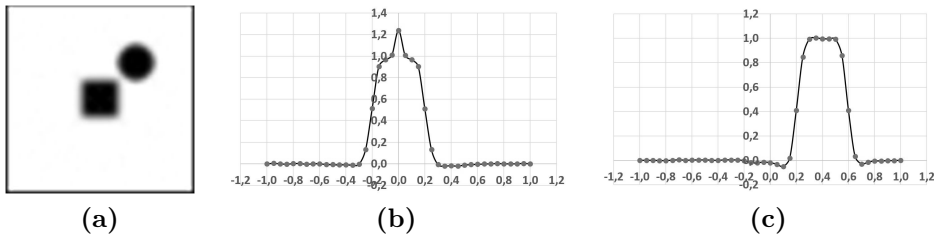


Рис. 4. Рисунок и графики получены при $N_r = 40$, $N_\theta = 80$, $N_\varphi = 120$, $N_y = 80$, $N_l = 40$. (a) — восстановленное изображение функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3 = 0$ в пределах квадрата $|x_k| \leq 1$; $k = 1, 2, 3$. (b) — график функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3 = 0$ вдоль прямой $x_1 = 0$; лапласиан вычислялся в узлах сетки с шагом $1/10$. (c) — график функции $\lambda_1(x)$ в плоскости $x_3 = 0$ вдоль прямой $x_1 = 0.4$; лапласиан вычислялся в узлах сетки с шагом $1/10$.

3. Заключение

Для описания неоднородных сред в теории зондирования для обобщенного преобразования Радона естественно использовать разрывные функции. Такой подход направлен на широкое применение результатов. Однако, как уже отмечалось, авторам настоящей работы не удалось обнаружить в литературе подходящих строго доказанных формул типа обращения для таких функций. При этом имеется довольно много успешных численных исследований на эту тему. Наша работа сочетает два таких подхода. Мы используем строго доказанную нами формулу и проверяем ее численным экспериментом. Полученные результаты показали хорошее соответствие этих двух подходов, что позволяет нам рекомендовать их для практического применения.

Список литературы

- [1] Курант Р., *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [2] Йон Ф., *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, Изд-во иностранной литературы, М., 1958.
- [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Физматгиз, М., 1962.
- [4] Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я., *Теория операторов и некорректные задачи*, Издательство Института математики СО РАН, Новосибирск, 2010.
- [5] Романов В. Г., *Устойчивость в обратных задачах*, Научный Мир, М., 2004.
- [6] Markoe A., *Analytic tomography in Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge. UK.
- [7] Наттерер Ф., *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, М., 1990.
- [8] Kalnin T. G., Ivonin D. A., Abrosimov K. N., Grachev E. A., Sorokina N. V., “Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods”, *Eurasian Soil Science*, **54**:9, (2021), 1400–1409.
- [9] Темиргалиев Н., Абикинова Ш. К., Ажгалиев Ш. У., Таугынбаева Г. Е., “Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази- Монте-Карло”, *Известия вузов. Математика*, 2020, № 3, 98–104.
- [10] Баев А. В., “Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **58**:4, (2018), 550–560.
- [11] Симонов Е. Н., Прохоров А. В., Акинцева А. В., “Математическое моделирование реконструкции объемных изображений в рентгеновской компьютерной томографии с применением голографических методов”, *Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование*, **12**:3, (2019), 102–114.
- [12] Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T., “Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields”, *Numerical computations: Theory and algorithms. Part II. Sergeev Ya. D., Kvasov D. E. (Eds.). Lecture Notes in Computer Science*, **11974**, (2020), 97–111.
- [13] Anikonov D. S., Balakina E. Yu., Konovalova D. S., “An inverse problem for generalized Radon transformation”, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*, **15**:1, (2022), 41–51.
- [14] Anikonov D. S., Konovalova D. S., “Formula for the inversion of the Radon transform in the

class of discontinuous functions”, *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, **27**:3, (2024), 5–11.

Поступила в редакцию
16 октября 2025 г.

Работа выполнена по программе госзадания
ИМ СО РАН, FWNF-2026-0029 и в рамках
государственного задания ИПМ ДВО РАН
№ 075-00459-25-00.

*Anikonov D. S.*¹, *Nazarov V. G.*² Numerical aspects of one inversion formula for Radon transform. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2026. V. 26. No 1. P. 14–21.

¹Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

²Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The work is devoted to the numerical analysis of one aspect of the Radon transform theory in odd-dimensional Euclidean space. This aspect is that the known inversion formula, proven for smooth functions, also holds for discontinuous functions at all points of continuity of the integrand, provided an additional condition is met. This condition, which we call pseudoconvexity of the set of continuity points, is not burdensome for mathematical models of sensing theory. At the same time, it significantly expands the possibilities for practical application of theoretical results. Therefore, it is advisable to verify the performance of the numerical reconstruction algorithm based on the mentioned formula. The testing conducted in this work showed a sufficiently good agreement between theoretical and computational results.

Key words: Radon transform, integral geometry, probing, indicator, discontinuous functions, numerical experiment.