Дальневосточный математический журнал. 2026. Т. 26. № 1. С. 22–35

УДК 519.63
MSC2020 35L05, 35L25

© М. Х. Бештоков[1]

Построение высокоточных разностных схем для нагруженных волновых дифференциальных уравнений с граничными условиями первого рода

В прямоугольной области изучены первая начально-краевая задача для одномерных по пространству нагруженных волновых уравнений. Для численного решения исходных задач построены разностные схемы повышенного порядка точности, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Методом энергетических неравенств выведены оценки решений задач в разностной трактовке. Из полученных априорных оценок следуют единственность, а также непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных рассматриваемых задач и, в силу линейности рассматриваемой задачи, сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью сходимости $O(h^4 + \tau^2)$.

Ключевые слова: *первая начально-краевая задача, волновое уравнение, нагруженное уравнение, априорная оценка, разностная схемы повышенного порядка точности, устойчивость и сходимость схем.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202603

Введение

Моделирование многих физических процессов приводит к частным дифференциальным волновым уравнениям. Волновые уравнения часто характеризуются высокими градиентами и резкими изменениями, что делает их сложными для численного решения. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации позволяют эффективно моделировать такие процессы благодаря своей высокой точности и численной устойчивости. Они могут использоваться для решения различных типов волновых уравнений, включая уравнения в частных производных, описывающие акустические волны, электромагнитные волны и механические колебания.

[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А. Электронная почта: beshtokov-murat@yandex.ru

Настоящая работа посвящена исследованию первой начально-краевой задачи для одномерных по пространству нагруженных дифференциальных волновых уравнений. Для приближенного решения рассматриваемых задач построены разностные схемы повышенного порядка точности, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Доказаны леммы, на основе которых методом энергетических неравенств получены априорные оценки в разностной трактовке. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также — в силу линейности разностных задач — сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью сходимости $O(h^4+\tau^2)$, если это решение существует в классе гладкости $C^{6,4}(\overline{D})$.

Численным методам решения различных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных посвящены работы [1–5]. Построению разностных схем повышенного порядка аппроксимации посвящены работы авторов [6–12].

Настоящая работа является непосредственным продолжением серии работ автора в этом направлении [4,5,10–12], в которых в основном были предложены разностные методы решения начально-краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности и уравнений Аллера.

1. Постановка задачи

В замкнутом прямоугольнике $\overline{D}=\{(x,t):0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T\}$ рассмотрим первую начально-краевую задачу для нагруженного дифференциального волнового уравнения

$$u_{tt}=k(t)u_{xx}-\sum_{s=1}^{m}q_s(x,t)u(\xi_s,t)+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t\leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered}0<c_0\leqslant k(t)\leqslant c_1,\quad |k_t,q_s,q_{s,\bar{x}x}|\leqslant c_2,\quad s=1,2,\ldots,m,\\ k\in C^2[0,T],\quad q_s,f\in C^{4,2}(\overline{D}),\quad u\in C^{6,4}(\overline{D}),\quad u_0,u_1\in C^4(0,l),\end{gathered} \tag{4}$$

а также выполнены условия согласования в угловых точках, $\xi_s,(s=1,2,\ldots,m)$ — произвольные точки интервала $(0,l):0<\xi_1<\ldots<\xi_m<l$.

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для численного решения исходной задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. Для этих целей введём равномерную сетку $\bar{\omega}_{h\tau}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau=\big\{(x_i,t_j)\in\overline{D}\big\}$, где

$$\omega_h=\left\{x_i=ih,\ i=\overline{1,N-1},h=\frac{l}{N}\right\},\quad \omega_\tau=\left\{t_j=j\tau,\ j=\overline{1,j_0-1},\ \tau=\frac{T}{j_0}\right\},$$

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : 1 \leqslant i \leqslant N-1,\ 1 \leqslant j \leqslant j_0 - 1\},$$
$$\bar\omega_h = \left\{x_i,\ i = \overline{0, N}\right\}, \quad \bar\omega_\tau = \left\{t_j,\ j = \overline{0, j_0}\right\}, \quad \bar\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : 0 \leqslant i \leqslant N,\ 0 \leqslant j \leqslant j_0\},$$

На сетке $\bar\omega_{h\tau}$ задаче (1)—(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4+\tau^2)$:

$$\mathcal{H}_h y_{\bar t t} = a y_{\bar x x}^{(\sigma,\sigma)} - \sum_{s=1}^{m} \mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_j) + \mathcal{H}_h \varphi, \quad (x,t) = (x, t_j) \in \omega_{h,\tau}, \tag{5}$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t \in \bar\omega_\tau, \tag{6}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \bar u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{7}$$

где

$$a = a^j = k(t_{j+\frac12}), \quad d_{s,i}^j = q_s(x_i, t_{j+\frac12}), \quad a^{(-1)} = a^{j-1}, \quad \varphi_i^j = f_i^{j+\frac12} = f(x_i, t_{j+\frac12}),$$
$$\mathcal{H}_h y_i^j = \frac{1}{12}\left(y_{i+1}^j + 10 y_i^j + y_{i-1}^j\right) = y_i^j + \frac{h^2}{12} y_{\bar x x, i}^j, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$
$$\bar u_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}\left[k(0)u''(x,0) - \sum_{s=1}^{m} q_s(x,0) u_0(\xi_s) + f(x,0)\right],\ x \in \omega_h,$$
$$y^{(\sigma,\sigma)} = \sigma\hat y + (1-2\sigma)y + \sigma\check y = y + \sigma\tau^2 y_{\bar t t}, \quad y_{\mathring t} = 0.5(\hat y_{\bar t} + y_{\bar t}),$$
$$\hat y = y^{j+1}, \quad \check y = y^{j-1}, \quad y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad x_{i_s} \leqslant \xi_s \leqslant x_{i_s+1},$$
$$\widetilde{y}(\xi_s, t_j) = \frac{(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+1})(\xi_s - x_{i_s+2})}{-6h^3} y_{i_s-1}^j +$$
$$+\frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s+1})(\xi_s - x_{i_s+2})}{2h^3} y_{i_s}^j + \frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+2})}{-2h^3} y_{i_s+1}^j +$$
$$+\frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+1})}{6h^3} y_{i_s+2}^j,$$
$$\widetilde{y}^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_j) = \sigma\widetilde{y}(\xi_s, t_{j+1}) + (1-2\sigma)\widetilde{y}(\xi_s, t_j) + \sigma\widetilde{y}(\xi_s, t_{j-1}) = \widetilde{y}(\xi_s, t_j) + \sigma\tau^2 \widetilde{y}_{\bar t t}(\xi_s, t_j).$$

В дальнейшем будем считать, что $h < \min\{\xi_1, l - \xi_m\}$.

Найдем априорную оценку решения (5)–(7) методом энергетических неравенств, в связи с чем введем скалярные произведения и норму в виде

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (1, y^2) = \|y(\cdot, t)\|_0^2 = \|y\|_0^2, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h, \quad (1, y^2] = \|y]|_0^2.$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *[13, Лемма 3, с. 109]. Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar\omega_h$ и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливы оценки*

$$\frac{h^2}{4}\|y_{\bar x}]|_0^2 \leqslant \|y\|_0^2 \leqslant \frac{l^2}{8}\|y_{\bar x}]|_0^2.$$

Лемма 2. *Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar\omega_{h\tau}$, справедливо равенство*

$$y y_{\mathring t} = \frac14\left(y^2 + \check y^2\right)_t - \frac{\tau^2}{4}\left((y_{\bar t})^2\right)_t.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения проведём по аналогии с [13], тогда имеем

$$yy_{\overset{\circ}{t}} = y^j\,\frac{y^{j+1}-y^{j-1}}{2\tau} = \frac{y^{j+1}y^j - y^jy^{j-1}}{2\tau} = \frac{1}{2}\left(y^jy^{j-1}\right)_t = \frac{1}{4}\left(2y^jy^{j-1}\right)_t =$$
$$= \frac{1}{4}\left((y^j)^2 + (y^{j-1})^2 - (y^j)^2 + 2y^jy^{j-1} - (y^{j-1})^2\right)_t$$
$$= \frac{1}{4}\left((y^j)^2 + (y^{j-1})^2 - ((y^j - y^{j-1})^2\right)_t = \frac{1}{4}(y^2+\check{y}^2)_t - \frac{\tau^2}{4}(y^2_{\bar t})_t.$$

Следовательно,

$$yy_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{4}(y^2+\check{y}^2)_t - \frac{\tau^2}{4}(y^2_{\bar t})_t.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *[11]. Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar\omega_{h\tau}$, справедливы оценки*

$$\frac{1}{3}\|y\|_0^2 \leqslant \|\mathcal{H}_h y\|_0^2 \leqslant \frac{20}{9}\|y\|_0^2$$

при $y_0 = y_N = 0$.

Лемма 3 представляет собой исправленную формулировку (9) [11, с. 8]: в правой части неравенства исправлена опечатка — заменено $\frac{10}{9}$ на $\frac{20}{9}$. Доказательство не приводится, поскольку оно повторяет преобразования (8), (9) в [11, с. 8].

Лемма 4. *Для любой функции $y(x)$, заданной на сетке $\overline{\omega}_h$, справедливо неравенство*

$$\max_{x\in\overline{\omega}_h} y^2(x) \leqslant \varepsilon\|y_{\bar x}]|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\|\,y\|^2,$$

где ε — произвольная положительная постоянная, l — длина интервала, на котором введена сетка $\overline{\omega}_h$.

Лемма 4 следует из [14, Лемма 1] при $\alpha=1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4), тогда если $\sigma \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h \leqslant \sqrt{6c_0(\sigma-\frac{1}{2})\tau}$, $\tau \leqslant \tau_0(c_0,c_1,c_2,\sigma,T,l,m)$, то для решения разностной задачи (5)–(7) справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leqslant M\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau + \|y^1\|_1^2\right],$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ,

$$\|y\|_1 = \left[\|y_{\bar t}\|_0^2 + \|y_{\bar x}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar x}]|_0^2 + \left(\sigma - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tau^2\|y_{\bar x\bar t}]|_0^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С целью найти априорную оценку решения задачи (5)–(7) умножим уравнение (5) скалярно на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}} = \tau(\hat{y}_{\bar t} + y_{\bar t})$:

$$(\mathcal{H}_h y_{\bar t t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}) = \left(a y_{\bar x x}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) - \left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s,t_j), 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) + (\mathcal{H}_h\varphi, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}). \quad (8)$$

Пользуясь леммами 1–4, преобразуем каждое слагаемое, входящее в (8):

$$(\mathcal{H}_h y_{\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}) = \left(y_{\bar{t}t} + \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = (y_{\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}) + \left(\frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right). \tag{9}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в правую часть (9), тогда получим

$$(y_{\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}) = (\hat{y}_{\bar{t}} - y_{\bar{t}}, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}) = \left(1, \hat{y}_{\bar{t}}^2 - y_{\bar{t}}^2\right) = \left(\tau, (y_{\bar{t}}^2)_t\right) = (\tau, \bar{y}_{\bar{t}}^2)_t = \tau\left(\|y_{\bar{t}}\|_0^2\right)_t, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \frac{h^2}{12}\left(y_{\bar{x}x\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = -\frac{h^2}{12}\left(y_{\bar{x}\bar{t}t}, 2\tau y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right] = -\frac{h^2}{12}\left(1, \left(\hat{y}_{\bar{x}t} - y_{\bar{x}t}\right)\left(\hat{y}_{\bar{x}t} + y_{\bar{x}t}\right)\right] = \\ = -\frac{h^2}{12}\left(1, \hat{y}_{\bar{x}t}^2 - y_{\bar{x}t}^2\right] = -\frac{h^2\tau}{12}\left(1, \left(y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right)_t\right] = -\frac{h^2\tau}{12}\left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right)_t. \end{gathered} \tag{11}$$

Учитывая (10), (11), из (9) находим

$$(\mathcal{H}_h y_{\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}) = \tau\left(\|y_{\bar{t}}\|_0^2\right)_t - \frac{h^2\tau}{12}\left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right)_t, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \left(a y_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = -\left(a y_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right] = -\left(a y_{\bar{x}} + a\sigma\tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}t}, 2\tau y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right] = \\ = -\left(2a\tau, y_{\bar{x}} y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right] - \left(2\sigma\tau^3 a, y_{\bar{x}\bar{t}t} y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в правую часть (13). Тогда получим

$$\begin{gathered} -\left(2a\tau, y_{\bar{x}} y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right] = -\left(\frac{\tau}{2}a, \left(y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_x^2\right)_t - \tau^2\left(y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right)_t\right] = \\ = -\frac{\tau}{2}\left(a^{(-1)}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t + \frac{\tau}{2}\left(a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right], \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} -\left(2\sigma\tau^3 a, y_{\bar{x}\bar{t}t} y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right] = -\left(\tau^2\sigma a, \left(\hat{y}_{\bar{x}t} - y_{\bar{x}\bar{t}}\right)\left(\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}} + y_{\bar{x}\bar{t}}\right)\right] = -\left(\sigma\tau^2 a, \hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}^2 - y_{\bar{x}t}^2\right] = \\ = -\sigma\tau^3\left(a, \left(y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right)_t\right] = -\sigma\tau^3\left(a^{(-1)}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t + \sigma t^3\left(a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}t}^2\right]. \end{gathered} \tag{15}$$

Учитывая (14), (15), из (13) получаем

$$\begin{gathered} \left(a y_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = -\frac{\tau}{2}\left(a^{(-1)}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}t}^2\right]_t + \frac{\tau}{2}\left(a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right] - \\ -\sigma\tau^3\left(a^{(-1)}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t + \sigma\tau^3\left(a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right] = -\tau\left(\frac{a^{(-1)}}{2}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2\right]_t - \\ -\tau\left(a^{(-1)}, \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t + \tau\left(\frac{a_{\bar{t}}}{2}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2\right] + \tau\left(a_{\bar{t}}, \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right], \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} -\left(\sum_{s=1}^m \mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_j), 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \\ = -\left(\sum_{s=1}^m \mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}(\xi_s, t_j), 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) - \left(\sum_{s=1}^m \sigma\tau^2 \mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}_{\bar{t}t}(\xi_s, t_j), 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right). \end{gathered} \tag{17}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в правую часть (17), с учетом леммы 4, тогда получим

$$-\left(\sum_{s=1}^m \mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}(\xi_s, t_j), 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = -2\tau \sum_{s=1}^m \widetilde{y}(\xi_s, t_j)\left(\mathcal{H}_h d_s, y_{\overset{\circ}{t}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \tau \sum_{s=1}^{m} \left(\widetilde{y}^2(\xi_s, t_j) + (\mathcal{H}_h d_s, y_{\overset{\circ}{t}})^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \tau \sum_{s=1}^{m} \left(M_1 \left(\max \left\{ |y^j_{i_s-1}|, |y^j_{i_s}|, |y^j_{i_s+1}|, |y^j_{i_s+2}| \right\} \right)^2 + (\mathcal{H}_h d_s, y_{\overset{\circ}{t}})^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \tau \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 + \left(1, y^2_{\overset{\circ}{t}}\right) \right) \leqslant M_2 \tau \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 + \frac{1}{4} \left(1, (\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})^2 \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \tau \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 \right), \tag{18}$$

$$-\left(\sum_{s=1}^{m} \sigma \tau^2 \mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}_{\bar{t}t}(\xi_s, t_j), 2\tau y_{\overset{\circ}{t}} \right) = -2\sigma\tau \sum_{s=1}^{m} \tau^2 \widetilde{y}_{\bar{t}t}(\xi_s, t_j) \left(\mathcal{H}_h d_s, y_{\overset{\circ}{t}} \right) =$$

$$= -\sigma\tau \sum_{s=1}^{m} \tau \left(\hat{\widetilde{y}}_{\bar{t}}(\xi_s, t_j) - \widetilde{y}_{\bar{t}}(\xi_s, t_j) \right) \left(\mathcal{H}_h d_s, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sigma\tau \sum_{s=1}^{m} \left(\tau^2 \left(\hat{\widetilde{y}}_{\bar{t}}(\xi_s, t_j) - \widetilde{y}_{\bar{t}}(\xi_s, t_j) \right)^2 + (\mathcal{H}_h d_s, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant M_3 \sigma\tau \sum_{s=1}^{m} \left(\hat{\widetilde{y}}^2_{\bar{t}}(\xi_s, t_j)\tau^2 + \widetilde{y}^2_{\bar{t}}(\xi_s, t_j)\tau^2 + \left(1, (\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})^2 \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma\tau^3 \varepsilon M_4 \left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 \right) + M_5^{\varepsilon} \tau \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right). \tag{19}$$

Учитывая (18), (19), из (17) находим

$$\begin{gathered} -\left(\sum_{s=1}^{m} \mathcal{H}_h d_s \widetilde{y}^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_j), 2\tau y_{\overset{\circ}{t}} \right) \leqslant \\ \leqslant \sigma\tau^3 \varepsilon M_4 \left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 \right) + M_2 \tau \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 \right) + M_6^{\varepsilon} \tau \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right). \end{gathered} \tag{20}$$

$$(\mathcal{H}_h \varphi, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}) = \tau \left(\mathcal{H}_h \varphi, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}} \right) \leqslant \tau \left(1, (\mathcal{H}_h \varphi)^2 + \frac{1}{4} \left(\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}} \right)^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \tau \left(1, (\mathcal{H}_h \varphi)^2 + \frac{1}{2} \hat{y}^2_{\bar{t}} + \frac{1}{2} y^2_{\bar{t}} \right) = \tau \|\mathcal{H}_h \varphi\|_0^2 + \frac{\tau}{2} \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{20}{9} \|\varphi\|_0^2 \tau + \frac{\tau}{2} \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right). \tag{21}$$

Учитывая полученные оценки (9)–(21), из (8) находим

$$\begin{gathered} \tau \left(\|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right)_t - \frac{h^2 \tau}{12} \left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 \right)_t + \tau \left(\frac{a^{(-1)}}{2}, y^2_{\bar{x}} + \check{y}^2_{\bar{x}} \right]_t + \tau \left(a^{(-1)}, \tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) y^2_{\bar{x}\bar{t}} \right]_t \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\sigma\tau^3 M_4 \left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 \right) + M_2 \tau \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 \right) + \tau M_7^{\varepsilon} \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right) + \\ + \tau \left(\frac{a_{\bar{t}}}{2}, y^2_{\bar{x}} + \check{y}^2_{\bar{x}} \right] + \tau \left(a_{\bar{t}}, \tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) y^2_{\bar{x}\bar{t}} \right] + \frac{20}{9} \|\varphi\|_0^2 \tau. \end{gathered} \tag{22}$$

Просуммировав (22) по j' от 1 до j, получим

$$\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \frac{c_0}{2} \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 \right) + \left(c_0 \tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) - \frac{h^2}{12} \right) \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\sigma\tau^2 M_4 \sum_{j'=1}^{j} \left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2\right)\tau +$$

$$+M_8^{\varepsilon}\sum_{j'=1}^{j}\left[\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 + c_2\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\right]\tau + \tag{23}$$

$$+M_9\left[\|y_{\bar{t}}^1\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\left(\|y_{\bar{x}}^1]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|_0^2\right) + \left(c_2\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right) - \frac{h^2}{12}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|_0^2\right].$$

Выбирая $\sigma > \frac{1}{2}$, $h \leqslant \sqrt{6c_0(\sigma-\frac{1}{2})}\tau$, из (23) находим

$$\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 \leqslant \varepsilon\sigma\tau^2 M_4 \sum_{j'=1}^{j}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2\right)\tau +$$

$$+M_{10}^{\varepsilon}\sum_{j'=1}^{j}\left[\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 + \tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right]\tau + \tag{24}$$

$$+M_{11}\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi\|_0^2\tau + \|y_{\bar{t}}^1]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^1]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|_0^2 + \tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|_0^2\right].$$

В (24) преобразовав $\sum\limits_{j'=1}^{j}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2\right)\tau$ и $\sum\limits_{j'=1}^{j}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2\right)\tau$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|_0^2\right)\tau = \sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j'+1}]|_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau = \sum_{j'=2}^{j+1}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau = \\ = \tau\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 + \tau\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{1}]|_0^2 + 2\sum_{j'=2}^{j}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau \leqslant \tau\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 + \tau\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{1}]|_0^2 + 2\sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2\right)\tau = \sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}}^{j'+1}\|_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}}^{j'}\|_0^2\tau = \sum_{j'=2}^{j+1}\|y_{\bar{t}}^{j'}\|_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}}^{j'}\|_0^2\tau = \\ = \tau\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|_0^2 + \tau\|y_{\bar{t}}^{1}\|_0^2 + 2\sum_{j'=2}^{j}\|y_{\bar{t}}^{j'}\|_0^2\tau \leqslant \tau\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|_0^2 + \tau\|y_{\bar{t}}^{1}\|_0^2 + 2\sum_{j'=1}^{j}\|y_{\bar{t}}^{j'}\|_0^2\tau.\end{gathered} \tag{26}$$

Принимая во внимание лемму 1, (25), (26), из (24) находим

$$(1-M_{10}\tau)\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \left(\sigma\left(1-\varepsilon T M_4\right) - \frac{1}{2}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_{12}^{\varepsilon}\sum_{j'=1}^{j}\left[\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \left[\left(\sigma\left(1-\varepsilon M_{13}\right)-\frac{1}{2}\right)\tau^2\right]\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right]\tau + \tag{27}$$

$$+M_{14}\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi\|_0^2\tau + \|y_{\bar{t}}^1\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^1]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|_0^2 + \left(\sigma\left(1-\varepsilon M_{15}\right)-\frac{1}{2}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|_0^2\right].$$

Выбирая $\tau \leqslant \tau_0 = \frac{1}{2M_{10}}$, $\sigma \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon \leqslant \min\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}M_4T}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}M_{13}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}M_{15}}\right\}$ из (27) получаем

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leqslant M_{16}\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|_1^2\tau + M_{17}\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau + \|y^1\|_1^2\right], \tag{28}$$

где

$$\|y\|_1^2 = \|y_{\bar t}\|_0^2 + \|y_{\bar x}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar x}]|_0^2 + \left(\sigma - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tau^2\|y_{\bar x\bar t}]|_0^2.$$

Применяя разностный аналог леммы Гроноулла [15, Лемма 4, с. 171], из (28) получаем

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leqslant M\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau + \|y^1\|_1^2\right], \tag{29}$$

где M_i, $(i=1,2,3,...)$ — положительные постоянные, не зависящие от h и τ.

Теорема 1 доказана. □

Из оценки (29) следуют единственность, устойчивость и сходимость схемы (5)–(7) со скоростью $O(h^4+\tau^2)$ при $\sigma \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h \leqslant \sqrt{6c_0(\sigma-\frac{1}{2})\tau}$, $\tau \leqslant \tau_0(c_0,c_1,c_2,\sigma,T,l,m)$ в норме $\|y\|_1$, где

$$\|y\|_1 = \left[\|y_{\bar t}\|_0^2 + \|y_{\bar x}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar x}]|_0^2 + \left(\sigma - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tau^2\|y_{\bar x\bar t}]|_0^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

3. Постановка задачи Б

В замкнутом прямоугольнике $\overline{D} = \{(x,t): 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим вместо уравнения (1) интегро-дифференциальное волновое уравнение

$$u_{tt} + \int_0^t \rho(t,\xi)u(x,\xi)d\xi = k(t)u_{xx} - q(t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T \tag{30}$$

с краевыми условиями (3), начальными условиями (4), условиями гладкости (4) для входных данных и решения, а также следующими условиями:

$$0 < c_0 \leqslant q(t) \leqslant c_1, \quad |\rho| \leqslant c_2, \quad \rho = \rho(t,\xi), \quad \rho \in C_{t,\xi}^{2,1}\left([0,T]\times[0,T]\right), \ 0 \leqslant \xi \leqslant t. \tag{31}$$

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На сетке $\bar\omega_{h\tau}$ задаче (30), (31) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4+\tau^2)$:

$$\mathcal{H}_h y_{\bar t t} + \mathcal{H}_h\sum_{s=0}^{j}p^{j,s}y^s\bar\tau = ay_{\bar x x}^{(\sigma,\sigma)} - d\mathcal{H}_h y^{(\sigma,\sigma)} + \mathcal{H}_h\varphi, \quad (x,t) = (x,t_j) \in \omega_{h,\tau}, \tag{32}$$

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \quad t \in \bar\omega_\tau, \tag{33}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \bar u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{34}$$

где

$$d = d^j = q(t_{j+\frac{1}{2}}), \quad p^{j,s} = \rho^{j+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}} = \rho\left(t_{j+\frac{1}{2}}, t_{s+\frac{1}{2}}\right),$$
$$\bar{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}\left[k(0)u''(x,0) - q(0)u_0(x) + f(x,0)\right], \ x \in \omega_h,$$
$$\sum_{s=0}^{j} y_i^s \bar{\tau} = \sum_{s=1}^{j} y_i^s \tau + \frac{\tau}{2} y_i^0, \quad \bar{\tau} = \begin{cases} \frac{\tau}{2}, \ s = 0, \\ \tau, \ s \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4), (31), *тогда если* $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $h \leqslant \sqrt{\frac{3c_0}{c_0c_1+1}}\tau$, $\tau \leqslant \tau_0(c_0, c_1, c_2, \sigma, T)$, *то для решения разностной задачи* (32)–(34) *справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leqslant M\left[\sum_{j'=1}^{j} \|\varphi^{j'}\|_0^2\tau + \|y^1\|_1^2\right],$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, *не зависящая от* h *и* τ,

$$\|y\|_1 = \left[\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдём априорную оценку решения разностной задачи (32)–(34). Для этого воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим тогда (32) скалярно на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}} = \tau(\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})$:

$$\begin{gathered} (\mathcal{H}_h y_{\bar{t}t}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}) + \left(\mathcal{H}_h \sum_{s=0}^{j} p^{j,s} y_i^s \bar{\tau}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \\ \left(a y_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) - \left(d\mathcal{H}_h y^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) + (\mathcal{H}_h\varphi, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}). \end{gathered} \tag{35}$$

Пользуясь леммами 1–4, с учётом рассуждений (9)–(21) преобразуем каждое слагаемое, входящее в (35). Оценим второе слагаемое в левой части и второе слагаемой в правой части (35):

$$\left(\mathcal{H}_h \sum_{s=0}^{j} p^{j,s} y_i^s \bar{\tau}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \left(\sum_{s=0}^{j} p^{j,s} y_i^s \bar{\tau}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) + \frac{h^2}{12}\left(\sum_{s=0}^{j} p^{j,s} y_{\bar{x}x,i}^s \bar{\tau}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right). \tag{36}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в правую часть (36), и получим

$$\begin{gathered} \left(\sum_{s=0}^{j} p^{j,s} y_i^s \bar{\tau}, 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right) = \tau\left(\sum_{s=0}^{j} p^{j,s} y_i^s \bar{\tau}, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}\right) \leqslant \left(\frac{\tau}{2}, \left(\sum_{s=0}^{j} p^{j,s} y_i^s \bar{\tau}\right)^2 + (\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})^2\right) \leqslant \\ \leqslant \left(\tau, \frac{c_2^2 T}{2}\sum_{s=0}^{j}\left(y_i^s\right)^2\bar{\tau} + \hat{y}_{\bar{t}}^2 + y_{\bar{t}}^2\right) = \frac{c_2^2 T\tau}{2}\sum_{s=0}^{j}\|y^s\|_0^2\bar{\tau} + \tau\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \tau\|y_{\bar{t}}\|_0^2, \end{gathered} \tag{37}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\sum_{s=0}^{j}p^{j,s}y^s_{\bar{x}x,i}\bar{\tau},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)=\left(\frac{\tau}{2},\left(\frac{h^2}{12}\sum_{s=0}^{j}p^{j,s}y^s_{\bar{x}x,i}\bar{\tau}\right)^2+\left(\hat{y}_{\bar{t}}+y_{\bar{t}}\right)^2\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\tau,\frac{c_2^2Th^4}{288}\sum_{s=0}^{j}\left(y^s_{\bar{x}x,i}\right)^2\bar{\tau}+\hat{y}^2_{\bar{t}}+y^2_{\bar{t}}\right)\leqslant\frac{c_2^2T\tau h^4}{288}\sum_{s=0}^{j}\|y^s_{\bar{x}x}\|_0^2\bar{\tau}+\tau\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2\right)\leqslant \tag{38}$$
$$\leqslant\frac{c_2^2T\tau}{18}\sum_{s=0}^{j}\|y^s\|_0^2\bar{\tau}+\tau\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2\right).$$

Учитывая (37), (38), из (36) находим

$$\left(\mathcal{H}_h\sum_{s=0}^{j}p^{j,s}y^s_i\bar{\tau},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)\leqslant\frac{5c_2^2T\tau}{9}\sum_{s=0}^{j}\|y^s\|_0^2\bar{\tau}+2\tau\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2\right), \tag{39}$$

$$-\left(d\mathcal{H}_hy^{(\sigma,\sigma)},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)=-\left(d\mathcal{H}_hy+d\sigma\tau^2\mathcal{H}_hy_{\bar{t}t},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)=$$
$$=-\left(2d\tau,yy_{\overset{\circ}{t}}\right)-\left(\sigma\tau^2d,2\tau y_{\bar{t}t}y_{\overset{\circ}{t}}\right)-\frac{h^2}{12}\left(dy_{\bar{x}x},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)-\frac{h^2}{12}\left(\sigma\tau^2dy_{\bar{x}x\bar{t}t},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right). \tag{40}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в правую часть (40):

$$-\left(2d\tau,yy_{\overset{\circ}{t}}\right)=-\frac{\tau}{2}\left(d,\left(y^2+\check{y}^2\right)_t-\tau^2\left(y^2_{\bar{t}}\right)_t\right)=-\frac{\tau}{2}\left(d^{(-1)},y^2+\check{y}^2-\tau^2y^2_{\bar{t}}\right)_t+$$
$$+\frac{\tau}{2}\left(d_{\bar{t}},y^2+\check{y}^2-\tau^2y^2_{\bar{t}}\right), \tag{41}$$

$$-\frac{h^2}{12}\left(dy_{\bar{x}x},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)=\frac{h^2}{12}\left(d,2\tau y_{\bar{x}}y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right]=\frac{h^2\tau}{24}\left(d,\left(y^2_{\bar{x}}+\check{y}^2_{\bar{x}}\right)_t-\tau^2\left(y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right)_t\right]=$$
$$=\frac{h^2\tau}{24}\left(d^{(-1)},y^2_{\bar{x}}+\check{y}^2_{\bar{x}}-\tau^2y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]_t-\frac{h^2\tau}{24}\left(d_{\bar{t}},y^2_{\bar{x}}+\check{y}^2_{\bar{x}}-\tau^2y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right], \tag{42}$$

$$-\left(\sigma\tau^2d,2\tau y_{\bar{t}t}y_{\overset{\circ}{t}}\right)=-\left(\tau^2\sigma d,\left(\hat{y}_{\bar{t}}-y_{\bar{t}}\right)\left(\hat{y}_{\bar{t}}+y_{\bar{t}}\right)\right)=-\left(\tau^2\sigma d,\hat{y}^2_{\bar{t}}-y^2_{\bar{t}}\right)=$$
$$=-\left(\tau^3\sigma d,\left(y^2_{\bar{t}}\right)_t\right)=-\sigma\tau^3\left(d^{(-1)},y^2_{\bar{t}}\right)_t+\sigma\tau^3\left(d_{\bar{t}},y^2_{\bar{t}}\right), \tag{43}$$

$$-\frac{h^2}{12}\left(\sigma\tau^2dy_{\bar{x}x\bar{t}t},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)=\frac{h^2}{12}\left(d\sigma\tau^2,2\tau y_{\bar{t}t\bar{x}}y_{\bar{x}\overset{\circ}{t}}\right]=$$
$$=\frac{h^2}{12}\left(d\sigma\tau^2,\left(\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}-y_{\bar{x}\bar{t}}\right)\left(\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}+y_{\bar{x}\bar{t}}\right)\right]=\frac{h^2}{12}\left(d\sigma\tau^2,\hat{y}^2_{\bar{x}\bar{t}}-y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]= \tag{44}$$
$$=\frac{h^2}{12}\left(d\sigma\tau^3,\left(y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right)_t\right]=\frac{h^2}{12}\sigma\tau^3\left(d^{(-1)},y^2_{\bar{x}t}\right]_t-\frac{h^2}{12}\sigma\tau^3\left(d_{\bar{t}},y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right].$$

Учитывая (41)–(44), из (40) находим

$$-\left(d\mathcal{H}_hy^{(\sigma,\sigma)},2\tau y_{\overset{\circ}{t}}\right)=-\frac{\tau}{2}\left(d^{(-1)},y^2+\check{y}^2-\tau^2y^2_{\bar{t}}\right)_t+\frac{\tau}{2}\left(d_{\bar{t}},y^2+\check{y}^2-\tau^2y^2_{\bar{t}}\right)+$$
$$+\frac{h^2\tau}{24}\left(d^{(-1)},y^2_{\bar{x}}+\check{y}^2_{\bar{x}}-\tau^2y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]_t-\frac{h^2\tau}{24}\left(d_{\bar{t}},y^2_{\bar{x}}+\check{y}^2_{\bar{x}}-\tau^2y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]-\sigma\tau^3\left(d^{(-1)},y^2_{\bar{t}}\right)_t+$$
$$+\sigma\tau^3\left(d_{\bar{t}},y^2_{\bar{t}}\right)+\frac{h^2}{12}\sigma\tau^3\left(d^{(-1)},y^2_{\bar{x}t}\right]_t-\frac{h^2}{12}\sigma\tau^3\left(d_{\bar{t}},y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]=$$

$$= -\frac{\tau}{2}\left(d^{(-1)}, y^2+\check{y}^2\right)_t - \frac{\tau}{2}\left(d^{(-1)}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{t}}^2\right)_t + \frac{\tau}{2}\left(d_{\bar{t}}, y^2+\check{y}^2\right) +$$
$$+\frac{\tau}{2}\left(d_{\bar{t}}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{t}}^2\right) + \frac{h^2\tau}{24}\left(d^{(-1)}, y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right]_t + \frac{h^2\tau}{24}\left(d^{(-1)}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t - \tag{45}$$
$$-\frac{h^2\tau}{24}\left(d_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right] - \frac{h^2\tau}{24}\left(d_{\bar{t}}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right].$$

Учитывая полученные оценки (9)–(21), (36)–(45), из (35) находим

$$\tau\left(\|y_{\bar{t}}\|_0^2\right)_t - \frac{h^2\tau}{12}\left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right)_t + \tau\left(\frac{a^{(-1)}}{2}, y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right]_t + \tau\left(a^{(-1)}, \tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t +$$
$$+\frac{\tau}{2}\left(d^{(-1)}, y^2+\check{y}^2\right)_t + \tau\left(d^{(-1)}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{t}}^2\right)_t -$$
$$-\frac{h^2\tau}{24}\left(d^{(-1)}, y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right]_t - \frac{h^2\tau}{12}\left(d^{(-1)}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t \leqslant \tag{46}$$
$$\leqslant \tau M_9\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2\right) + \frac{5c_2^2 T\tau}{9}\sum_{s=0}^{j}\|y^s\|_0^2\bar{\tau} + \tau\left(\frac{a_{\bar{t}}}{2}, y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right] +$$
$$+\tau\left(a_{\bar{t}}, \tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right] + \frac{\tau}{2}\left(d_{\bar{t}}, y^2+\check{y}^2\right) + \tau\left(d_{\bar{t}}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{t}}^2\right) -$$
$$-\frac{h^2\tau}{24}\left(d_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right] - \frac{h^2\tau}{12}\left(d_{\bar{t}}, \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 y_{\bar{x}t}^2\right] + \frac{20}{9}\|\varphi\|_0^2\tau.$$

Просуммировав (46) по j' от 1 до j, получим

$$\left(1+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 c_0\right)\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \frac{c_0}{2}\left(1-\frac{h^2}{12}\right)\left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2\right) +$$
$$+\frac{c_0}{2}\left(\|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2\right) + \left(c_0\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{h^2}{12}\right) - \frac{h^2}{12}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_{10}\sum_{j'=1}^{j}\left[\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\left[1-\frac{h^2}{12}\right]\left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2\right) + \frac{c_2}{2}\left(\|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2\right) +\right.$$
$$\left.+\left[c_2\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{h^2}{12}\right)\right]\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\right]\tau + \frac{5c_2^2 T}{9}\sum_{j'=1}^{j}\tau\sum_{s=0}^{j'}\|y^s\|_0^2\bar{\tau} + \tag{47}$$
$$+M_{11}\left[\left(1+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2 c_2\right)\|y_{\bar{t}}^1\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\left(1-\frac{h^2}{12}\right)\left(\|y_{\bar{x}}^1]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|_0^2\right) +\right.$$
$$\left.+\frac{c_2}{2}\left(\|y^1\|_0^2 + \|y^0\|_0^2\right) + c_2\left(\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\left[1-\frac{h^2}{12}\right] - \frac{h^2}{12}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|_0^2\right].$$

Выбирая $\sigma \geqslant \frac{1}{2}, h \leqslant \sqrt{\frac{3c_0}{c_0 c_1+1}}\tau$, из (47) находим

$$\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}_0^2\|_0^2 + \tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_{12}\sum_{j'=1}^{j}\tau\sum_{s=0}^{j'}\|y^s\|_0^2\bar{\tau}+$$

$$+M_{13}\sum_{j'=1}^{j}\left[\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2+\|y_{\bar{t}}\|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2+\|y\|_0^2+\|\check{y}_0^2\|_0^2+\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right]\tau+ \quad (48)$$

$$+M_{14}\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi\|_0^2\tau+\|y_{\bar{t}}^1]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^1]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^0]|_0^2+\|y^1\|_0^2+\|y^0\|_0^2+\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|_0^2\right].$$

Оценим первое слагаемое в правой части (48):

$$\sum_{j'=1}^{j}\tau\sum_{s=0}^{j'}\|y^s\|_0^2\,\bar{\tau}=\sum_{j'=1}^{j}\tau\left(\sum_{s=1}^{j}\|y^s\|_0^2\tau+\frac{\tau}{2}\|y^0\|_0^2\right)\leqslant T\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|_0^2\tau+\frac{T\tau}{2}\|y^0\|_0^2. \quad (49)$$

Принимая во внимание (26), (49), из (48) находим

$$(1-M_{13}\tau)\,\|y_{\bar{t}}\|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2+\|y\|_0^2+\|\check{y}\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\leqslant$$

$$\leqslant M_{15}\sum_{j'=1}^{j}\left[\|y_{\bar{t}}\|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2+\|y\|_0^2+\|\check{y}\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right]\tau+ \quad (50)$$

$$+M_{16}\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi\|_0^2\tau+\|y_{\bar{t}}^1\|_0^2+\|y_{\bar{x}}^1]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^0]|_0^2+\|y^1\|_0^2+\|y^0\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|_0^2\right].$$

Выбирая $\tau\leqslant\tau_0=\frac{1}{2M_{13}}$, из (50) получаем

$$\|y^{j+1}\|_1^2\leqslant M_{17}\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|_1^2\tau+M_{18}\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau+\ \|y^1\|_1^2\right], \quad (51)$$

где

$$\|y\|_1^2=\|y_{\bar{t}}\|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2+\|y\|_0^2+\|\check{y}\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2.$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла [15, Лемма 4, с. 171], из (51) получаем

$$\|y^{j+1}\|_1^2\leqslant M\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau+\|y^1\|_1^2\right]. \quad (52)$$

Теорема 2 доказана. □

Из оценки (52) следует устойчивость и сходимость схемы (32)–(34) со скоростью $O(h^4+\tau^2)$ при $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$, $h\leqslant\sqrt{\frac{3c_0}{c_0c_1+1}}\tau$, $\tau\leqslant\tau_0(c_0,c_1,c_2,\sigma,T)$ в норме $\|y\|_1$, где

$$\|y\|_1=\left[\|y_{\bar{t}}\|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2+\|y\|_0^2+\|\check{y}\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Список литературы

[1] Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р., “О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:9, (2004), 1585–1595.

[2] Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р., “Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:9, (2006), 1566—1581.

[3] Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р., “Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:1, (2016), 99–112.

[4] Beshtokov M. KH., Khudalov M. Z., “Difference methods of the solution of local and nonlocal boundary value problems for loaded equation of thermal conductivity of fractional order”, *Stability, Control and Differential Games*, Springer Nature, 2020.

[5] Beshtokov M. KH., “The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. Vol.*, **158**:1, (2016), 12–19.

[6] Gao G. H., Sun Z. Z., “A compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equations”, *Comput Phys.*, **230**:3, (2011), 586–595.

[7] Lele S. K., “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution”, *Comput Phys.*, **103**:1, (1992), 16–42.

[8] Sun Z. Z., “On the compact difference scheme for heat equation with Neuman boundary conditions”, *Numer. Methods Partial Diff. Eqns.*, **25**, (2009), 320–1341.

[9] Ji C., Sun Z. Z., “A High-Order Compact Finite Difference Scheme for the Fractional Subdiffusion Equation”, *Journal of Scientific ComputingRussian Mathematic*, **64**:3, (2014), 959–985.

[10] Beshtokov M. KH., “Difference Scheme of Higher Order of Approximation for the Hallaire’s Equation with Variable Coefficients”, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, **26**:4, (2023), 5–17.

[11] Бештоков М. Х., Водахова В. А., Исакова М. М., “Приближенное решение задачи Дирихле для нагруженного уравнения теплопроводности”, *Математическая физика и компьютерное моделирование*, **26**:4, (2023), 1–17.

[12] Бештоков М. Х., “О сходимости разностной схемы высокого порядка аппроксимации для модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2024, № 3, 42–54.

[13] Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1983.

[14] Андреев В. Б., “О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **8**:6, (1968), 1218–1231.

[15] Самарский А. А., Гулин А. В., *Устойчивость разностных схем*, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию
15 апреля 2025 г.

Beshtokov M. KH.[1] Construction of high-accuracy finite difference schemes for loaded wave differential equations with boundary conditions of the first kind. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2026. V. 26. No 1. P. 22–35.

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

In a rectangular domain, the first initial-boundary value problem for one-dimensional loaded wave equations is studied. For the numerical solution of the initial problems, difference schemes of increased order of accuracy are constructed, approximating these problems on a uniform grid. The method of energy inequalities is used to derive estimates of solutions to problems in the difference interpretation. From the obtained a priori estimates follow the uniqueness, as well as the continuous and uniform dependence of the solution on the input data of the problems under consideration and, due to the linearity of the problem under consideration, the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem with the convergence in the rate of $O(h^4 + \tau^2)$.

Key words: *first initial-boundary value problem, wave equation, loaded equation, a priori estimate, difference schemes of increased order of accuracy, stability and convergence of schemes.*