Дальневосточный математический журнал. 2026. Т. 26. № 1. С. 36–42

УДК 517.95
MSC2020 35Q79

© А. А. Деревягин[1]

Релейность управления в задаче оптимизации теплообмена

Рассматривается задача оптимального управления для стационарной модели теплопереноса. Доказана разрешимость задачи и получены условия оптимальности, на основе которых обосновано свойство релейности оптимального управления.

Ключевые слова: *стационарный теплоперенос, теплопроводность, оптимальное управление, релейность управления.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202604

Введение. Постановка краевой задачи

Работа посвящена исследованию задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности. Роль управления играет зависящий от пространственных переменных граничный коэффициент теплообмена с внешней средой в граничном условии Робена. Для задач оптимального управления с ограничениями на управление в виде неравенств часто удается установить свойство релейности, т.е. оптимальное управление принимает либо минимальное, либо максимальное значение в точках области определения управления, что позволяет упростить алгоритмы поиска оптимального управления. Основная цель статьи — установить свойство релейности для рассматриваемого управления. Обзор работ, использующих свойство релейности оптимального управления, представлен в статье [1].

Рассмотрим ограниченную липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ, состоящей из частей Γ_0, Γ_c таких, что $\Gamma = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_c$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_c = \varnothing$. В этой области рассматривается следующая краевая задача:

$$\nabla \cdot (k\nabla\theta) = 0 \text{ в } \Omega, \quad k\partial_n\theta = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad k\partial_n\theta + u(\theta - \theta_b) = 0 \text{ на } \Gamma_c. \tag{1}$$

Здесь θ — искомая функция, а функции k, u, θ_b заданы. На данную задачу будем ссылаться как на задачу 1.

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: dereviagin.aa@dvfu.ru

Задача оптимального управления состоит в нахождении функций θ, u, удовлетворяющих (1) при условии минимизации целевого функционала $J(\theta)$,

$$J(\theta) = \int_{\Gamma_0} (\theta - \theta_d)^2 \, d\Gamma \to \inf, \ u \in U_{ad}.$$

Здесь $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_c)$ — множество допустимых управлений,

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma_c) : 0 < u_0 \leqslant u_1 \leqslant v \leqslant u_2\}.$$

Функции $u_1, u_2 \in L^2(\Gamma_c)$ являются заданными, $u_0 = \text{const}$.

1. Формализация задачи оптимального управления

Через V обозначим пространство Соболева $H^1(\Omega)$, а через H — пространство Лебега $L^2(\Gamma_c)$. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$ и $L^2(\Gamma_i)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_i}$, а нормы — через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\Gamma_i}$ соответственно.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

(i): $k \in L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant k_0 = \text{const} > 0$, $u \in U_{ad}$, $\theta_b \in L^4(\Gamma_c)$, $\theta_d \in L^2(\Gamma_0)$.

Определим операторы

$$A : V \to V', \ B : U_{ad} \times L^4(\Gamma_c) \to V', \ f : H \to V',$$

действующие по формулам

$$\langle A\theta, \tau \rangle = (k\nabla\theta, \nabla\tau) \quad \forall \tau \in V,$$
$$\langle B(u,\theta), \tau \rangle = (u\theta, \tau)_{\Gamma_c} \quad \forall \tau \in V,$$
$$\langle f\theta, \tau \rangle = (\theta, \tau)_{\Gamma_0} \quad \forall \tau \in V.$$

Через $\langle \varphi, x \rangle$ обозначено значение линейного функционала φ на элементе x.

Рассмотрим оператор $F : V \to V'$, действующий по формуле

$$F\theta = A\theta + B(u,\theta).$$

Теорема 1. *При каждом $u \in U_{ad}$ оператор F осуществляет изоморфизм пространств V и V'.*

Доказательство. Для доказательства утверждения требуется доказать существование и единственность решения $x \in V$ уравнения

$$Fx = y \tag{2}$$

для любой правой части $y \in V'$.

Рассмотрим билинейную форму $a : V^2 \to \mathbb{R}$, определённую формулой

$$a(\theta, \tau) = \langle F\theta, \tau \rangle.$$

Форма a ограниченна, так как

$$|a(\theta,\tau)| \leqslant |(k\nabla\theta,\nabla\tau)| + |(u\theta,\tau)_{\Gamma_c}| \leqslant$$
$$\leqslant \|k\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|\nabla\theta\| \cdot \|\nabla\tau\| + \|u\|_{\Gamma_c} \cdot \|\theta\|_{L^4(\Gamma_c)} \cdot \|\tau\|_{L^4(\Gamma_c)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|k\|_{L^\infty(\Omega)} + C_1^2 \cdot \|u\|_{\Gamma_c}\right) \cdot \|\theta\|_V \cdot \|\tau\|_V .$$

Здесь $C_1 = C_{1/2,4}C_\gamma$, а $C_{1/2,4}$ и C_γ — константы в неравенствах

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} \leqslant C_\gamma \cdot \|v\|_V \quad \forall v\in V,$$
$$\|v\|_{L^4(\Gamma_c)} \leqslant C_{1/2,4} \cdot \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_c),$$

которые справедливы в силу линейности и ограниченности операторов следа и вложения $H^{1/2}(\Gamma_c) \subset L^4(\Gamma_c)$.

Докажем коэрцитивность формы a.

$$a(\tau,\tau) = (k\nabla\tau,\nabla\tau) + (u\tau,\tau)_{\Gamma_c} \geqslant k_0\|\nabla\tau\|^2 + u_0\|\tau\|^2_{\Gamma_c}.$$

Пусть $c_0 = \min(k_0,u_0)$, тогда

$$a(\tau,\tau) \geqslant c_0 \cdot \left(\|\nabla\tau\|^2 + \|\tau\|^2_{\Gamma_c}\right).$$

Обозначим

$$\mu = \inf_{\|\tau\|_V=1} \left(\|\nabla\tau\|^2 + \|\tau\|^2_{\Gamma_c}\right).$$

Предположим, что $\mu=0$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{\tau_m\}$. При необходимости будем переходить к подпоследовательностям. Так как $\|\tau_m\|_V=1$, а пространство V рефлексивно, то существует подпоследовательность $\tau_m \to \tau^*$ слабо в V и сильно в $L^2(\Omega)$. Для любой функции $v\in V$

$$(\tau_m-\tau^*,v)_V = (\tau_m-\tau^*,v) + (\nabla\tau_m - \nabla\tau^*,\nabla v),$$

а значит, $\nabla\tau_m \to \nabla\tau^*$ слабо в $L^2(\Omega)$. $\tau_m|_{\Gamma_c} \to \tau^*|_{\Gamma_c}$ слабо в $H^{1/2}(\Gamma_c)$ и сильно в H. $\|\nabla\tau_m\|^2 + \|\tau_m\|^2_{\Gamma_c} \to 0$, а значит, $\nabla\tau_m \to 0$ в $L^2(\Omega)$ и $\tau_m|_{\Gamma_c} \to 0$ в H. В силу единственности предела $\nabla\tau^*=0$, то есть $\tau^*=\mathrm{const}$ и $\tau^*|_{\Gamma_c}=0$, то есть $\tau^*=0$. Так как $\tau_m\to\tau^*=0$ и $\nabla\tau_m\to 0$ в $L^2(\Omega)$, то $\|\tau_m\|^2_V = \|\tau_m\|^2 + \|\nabla\tau_m\|^2 \to 0$, что противоречит $\|\tau_m\|_V=1$. Значит, $\mu>0$. Тогда для произвольного $\tau\in V$, $\tau\neq 0$ справедливо

$$\left\|\frac{1}{\|\tau\|_V}\tau\right\|^2 + \left\|\frac{1}{\|\tau\|_V}\tau\right\|^2_{\Gamma_c} \geqslant \mu \iff \|\tau\|^2 + \|\tau\|^2_{\Gamma_c} \geqslant \mu\|\tau\|^2_V.$$

Для $\tau=0$ неравенство остаётся верным.

Таким образом, $a(\tau,\tau) \geqslant c_0\mu\|\tau\|^2_V$, что означает коэрцитивность формы a. Тогда по теореме Лакса–Мильграма уравнение (2) имеет единственное решение $x\in V$ для любого $y\in V'$ и справедлива оценка □

$$\|x\|_V \leqslant \frac{1}{c_0\mu}\|y\|_{V'}. \tag{3}$$

Введём оператор $G : V \times H \to V'$, действующий по формуле

$$G(\theta, u) = F\theta - B(u, \theta_b),$$

тогда уравнение $G(\theta,u)=0$ является слабой формулировкой задачи 1, а задача оптимального управления заключается в поиске таких функций $(\theta,u)\in V\times H$, что

$$\begin{cases} J(\theta) \to \inf \\ G(\theta, u) = 0 \\ u \in U_{ad} \end{cases}.$$

На данную задачу будем ссылаться как на задачу (C).

2. Разрешимость задачи оптимального управления

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i), тогда задача (C) имеет решение.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$Z_{ad} = \{(\theta, u) \in V \times U_{ad} : G(\theta, u) = 0,\ J(\theta) < \infty\}.$$

Так как функционал J ограничен снизу, то существует точная нижняя грань

$$\hat{J} = \inf_{Z_{ad}} J(\theta).$$

Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{(\theta_m, u_m)\} \subset Z_{ad}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} J(\theta_m) = \hat{J}.$$

$G(\theta_m, u_m) = 0$, что эквивалентно $F\theta_m = B(u_m, \theta_b)$, тогда так как $u_m \in U_{ad}$, то существует константа C такая, что $\|B(u_m, \theta_b)\|_{V'} \leqslant C$. В силу неравенства (3),

$$\|\theta_m\|_V \leqslant \frac{C}{c_0\mu},$$

а значит, существует подпоследовательность $\theta_m \to \hat{\theta}$ слабо в V и сильно в $L^2(\Omega)$. Из ограниченности и слабой замкнутости U_{ad} следует существование слабо сходящейся подпоследовательности $u_m \to \hat{u} \in U_{ad}$ слабо в H.

Докажем, что $G(\hat{\theta}, \hat{u}) = 0$. Найдём разность

$$G(\theta_m, u_m) - G(\hat{\theta}, \hat{u}) = A(\theta_m - \hat{\theta}) + B(u_m, \theta_m) - B(\hat{\theta}, \hat{u}) - B(u_m - \hat{u}, \theta_b) =$$
$$= A(\theta_m - \hat{\theta}) + B(u_m, \theta_m - \hat{\theta}) + B(u_m - \hat{u}, \hat{\theta}) - B(u_m - \hat{u}, \theta_b).$$

Для любой функции $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$ справедливы сходимости:

$$|\langle A(\theta_m - \hat{\theta}), v\rangle| = |(k\nabla(\theta_m - \hat{\theta}), \nabla v)| \leqslant \|k\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot |((\theta_m - \hat{\theta}, v)_V - (\theta_m - \hat{\theta}, v))| \to 0,$$

$$\langle B(u_m - \hat{u}, \hat{\theta}), v\rangle = (u_m - \hat{u}, \hat{\theta} v)_{\Gamma_c} \to 0,$$

$$\langle B(u_m - \hat{u}, \theta_b), v\rangle = (u_m - \hat{u}, \theta_b v)_{\Gamma_c} \to 0,$$

$$|\langle B(u_m, \theta_m - \hat{\theta}), v\rangle| = |(u_m(\theta_m - \hat{\theta}), v)_{\Gamma_c}| \leqslant \|u_m\|_{\Gamma_c} \cdot \|\theta_m - \hat{\theta}\|_{\Gamma_c} \cdot \|v\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \to 0.$$

Поэтому $0 = \langle G(\theta_m, u_m), v\rangle \to \langle G(\hat{\theta}, \hat{u}), v\rangle$ для любой функции $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, следовательно, $\langle G(\hat{\theta}, \hat{u}), v\rangle = 0$ для любой функции $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а так как $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в V, то $\langle G(\hat{\theta}, \hat{u}), v\rangle = 0$ для любой функции $v \in V$. $\theta_m|_{\Gamma_0} \to \hat{\theta}|_{\Gamma_0}$ сильно в $L^2(\Gamma_0)$ и J непрерывен, значит, $J(\theta_m) \to J(\hat{\theta})$, а в силу единственности предела $\hat{J} = J(\hat{\theta})$, следовательно, $(\hat{\theta}, \hat{u})$ — решение задачи (C). □

3. Необходимые условия оптимальности

Для получения системы оптимальности будем использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [2, теорема 1.5].

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (i) и $(\hat{\theta}, \hat{u})$ — решение задачи (C). Тогда существует единственное сопряжённое состояние $p \in V$ такое, что тройка $(\hat{\theta}, \hat{u}, p)$ удовлетворяет условиям*

$$A\hat{\theta} + B(\hat{u}, \hat{\theta} - \theta_b) = 0 \tag{4}$$

$$Ap + B(\hat{u}, p) = f(\theta_d - \hat{\theta}) \tag{5}$$

$$\langle B(v - \hat{u}, \hat{\theta} - \theta_b), p\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in U_{ad} \tag{6}$$

Доказательство. Найдём производную Фреше от оператора G по состоянию θ в точке $(\hat{u}, \hat{\theta})$:

$$G'_\theta = F.$$

По теореме 2 оператор G'_θ осуществляет изоморфизм пространств V и V'. Функция Лагранжа для задачи (C) имеет вид

$$L(\theta, u, p) = \lambda J(\theta) + \langle G(\theta, u), p\rangle = \|\theta - \theta_d\|^2_{\Gamma_0} + \langle A\theta, p\rangle + \langle B(u, \theta), p\rangle - \langle B(u, \theta_b), p\rangle.$$

Здесь $\lambda = 1$, так как $\operatorname{Im} G'_\theta = V'$.

Найдём производную Фреше функции L по состоянию в точке $(\hat{u}, \hat{\theta})$:

$$L'_\theta = f(\hat{\theta} - \theta_d) + Ap + B(\hat{u}, p).$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа $L'_\theta = 0$ имеет вид (5). Отметим, что в силу теоремы 2 существует единственное $p \in V$.

Найдём производную Фреше функции L по управлению в точке $(\hat{u}, \hat{\theta})$:

$$\langle L'_u, v\rangle = \langle B(v, \hat{\theta} - \theta_b), p\rangle.$$

Принцип минимума $\langle L'_u, v - \hat{u}\rangle \geqslant 0 \;\; \forall v \in U_{ad}$ имеет вид (6). Также $\hat{\theta}$ и $\hat{u}$ удовлетворяют слабой формулировке задачи 1, что влечёт за собой равенство (4). □

4. Релейность оптимального управления

Уравнение (5) соответствует следующей краевой задаче для p:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (k \nabla p) = 0 & \text{в } \Omega \\ k\partial_n p = \theta_d - \hat{\theta} & \text{на } \Gamma_0 \\ k\partial_n p + \hat{u} p = 0 & \text{на } \Gamma_c \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть в дополнение к условиям (i) выполняются условия (ii):* $\left|\frac{1}{k}\nabla k\right| \in L^3_{loc}(\Omega)$, $J(\hat{\theta}) > 0$. *Тогда* $p \neq 0$ *почти всюду на* Γ_c.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $\Gamma_1 \subset \Gamma_c$, $\operatorname{meas}\Gamma_1 > 0$ такое, что $p = 0$ на Γ_1. Тогда $k\partial_n p = 0$ на Γ_1, а значит, функцию p можно продолжить нулём в Ω_1, $\operatorname{meas}\Omega_1 > 0$, где $\Omega_1 \cap \Omega = \Gamma_1$. У функции k существует продолжение с сохранением класса в области Ω_1 по теореме [4, теорема 4.26]. Тогда в области $\Omega \cup \Omega_1$ выполняется

$$\nabla \cdot (k\nabla p) = 0 \implies \nabla k \cdot \nabla p + k\Delta p = 0 \implies |\Delta p| \leqslant \left|\frac{1}{k}\nabla k\right| \cdot |\nabla p|.$$

По теореме [3] $p = 0$ в Ω. Тогда из уравнения (5) следует, что $f(\theta_d - \hat{\theta}) = 0$, но $J(\hat{\theta}) > 0$, следовательно, не существует такого Γ_1, что означает $p \neq 0$ почти всюду на Γ_c. □

Лемма 2.

$$p(\hat{\theta} - \theta_b)(\xi - \hat{u}(x)) \geqslant 0 \quad \forall \xi \in [u_1(x), u_2(x)] \text{ почти всюду на } \Gamma_c. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что это не так и найдётся часть границы $\Gamma_1 \subset \Gamma_c$, $\operatorname{meas}\Gamma_1 > 0$ такая, что для каждого $x \in \Gamma_1$ существует такое число $\xi_0(x) \in [u_1(x), u_2(x)]$, что $p(\hat{\theta} - \theta_b)(\xi_0(x) - \hat{u}(x)) < 0$. Определим функцию

$$v_1(x) = \begin{cases} \xi_0(x), & x \in \Gamma_1 \\ \hat{u}(x), & x \in \Gamma_c \backslash \Gamma_1. \end{cases}$$

Заметим, что $v_1(x) \in U_{ad}$. Тогда $\langle B(v_1 - \hat{u}, \hat{\theta} - \theta_b), p\rangle < 0$, что противоречит (6). □

Пусть выполняется условие (iii): $\hat{\theta}|_{\Gamma_c} \neq \theta_b$ почти всюду на Γ_c. Тогда из неравенства (7) следует, что

$$\hat{u} = \begin{cases} u_1, & p(\hat{\theta} - \theta_b) > 0 \\ u_2, & p(\hat{\theta} - \theta_b) < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (i)-(iii). Тогда для оптимального управления* $\hat{u}$ *в задаче (С) справедливо свойство релейности с функцией переключения* (8).

Список литературы

[1] Гренкин Г. В., “Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:1, (2016), 24–38.

[2] Фурсиков А. В., *Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[3] Wolff T. H., “A property of measure in R^n and an application to unique continuation”, *Geometric and Functional Analysis*, **2**, (1992), 225-284.

[4] Adams Robert A., *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, **65**, Academic Press, Inc., New York, San Francisco, London, 1975.

Поступила в редакцию
23 сентября 2025 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

Dereviagin A. A.[1] Relay control in the problem of heat transfer optimization. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2026. V. 26. No 1. P. 36–42.

[1] Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

The problem of optimal control for a stationary model of heat transfer is considered. The solvability of the problem is proved and the conditions of optimality are obtained, on the basis of which the property of relay-like optimal control is substantiated.

Key words: *heat transfer, thermal conductivity, optimal control, relay control.*