

УДК 517.927.2
MSC2020 34A25

© А. А. Дмитриев¹

О корнях устойчивых полиномов в зависимости от параметра

В заметке рассматривается поведение корней характеристического полинома устойчивой системы дифференциальных линейных уравнений в зависимости от параметра.

Ключевые слова: *характеристический и устойчивый полином.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202605>

Введение

Исследование нулей характеристического полинома системы уравнений, описывающей модель идеальной кристаллической решётки с учетом коэффициента диссипации, рассматриваемого как параметр, сводится к изучению поведения корней этого полинома в зависимости от коэффициента диссипации. Этот параметр определяет кривые в комплексной плоскости, точки которой являются корнями рассматриваемого полинома. Характерной особенностью такой системы является существование особой кривой. В данной заметке установлено существование особой кривой в случае любой устойчивой системы с диссипацией, математическая модель которой описывается трёхдиагональной матрицей.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= b_1 u_1 + a_1 u_2 - \beta_1 \dot{u}_1 + \eta_1, \\ \ddot{u}_j &= c_j u_{j-1} + b_j u_j + a_j u_{j+1} \quad \text{для } j = 2, \dots, n-1, \\ \ddot{u}_n &= c_n u_{n-1} + b_n u_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Решение системы (1) непосредственно связано с детерминантом матрицы

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} s^2 - b_1 + \beta_1 s & -a_1 & \dots & \dots & \dots \\ -c_2 & s^2 - b_2 & -a_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -c_{n-1} & s^2 - b_{n-1} & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & -c_n & s^2 - b_n \end{pmatrix}.$$

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690043, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: dmitriev@iam.dvo.ru

Хорошо известные рекуррентные формулы для вычисления детерминанта такой матрицы (см. например, [1]) приводят к равенствам

$$\begin{aligned} \det A_n(s, \beta) &= P_n(s^2) + \beta s Q_n(s^2) & (2) \\ P_k(s^2) &= (s^2 - b_k)P_{k-1} - c_k a_{k-1} P_{k-2}, & P_0(s^2) = 1, P_{-1}(s^2) = 0, k = 1, \dots, n, \\ Q_k(s^2) &= (s^2 - b_k)Q_{k-1} - c_k a_{k-1} Q_{k-2}, & Q_1(s^2) = 1, Q_0(s^2) = 0, k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Если система (1) устойчива, то соответствующий полином (2) устойчив, т.е. вещественная часть его корней отрицательна. Заметим, что устойчивость системы (1) не зависит от конкретного значения параметра β : если она устойчива при некотором положительном значении β , то устойчивость сохраняется при всех положительных значениях β .

1. Кривые, порождаемые параметром

Пусть $g(s)$, $h(s)$ — полиномы степени m , $m-1$ с положительными коэффициентами таковы, что корни полиномов $g(-s^2)$ и $h(-s^2)$ перемежаются, т.е.

$$\begin{aligned} s_{-m} < t_{-m+1} < s_{-m+1} < \dots < t_{-1} < s_{-1} < 0 < s_1 < t_1 < s_2 < \dots < t_{m-1} < s_m, \\ s_{-k} &= -s_k, t_{-k} = -t_k, t_0 = 0. \end{aligned}$$

Другими словами, $g(s) = (s + s_1^2) \dots (s + s_m^2)$, $h(s) = (s + t_1^2) \dots (s + t_{m-1}^2)$. При этих предположениях полином

$$f(s, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} g(s^2) + \beta s h(s^2)$$

устойчив при любом $\beta > 0$. Сформулированные условия необходимы и достаточны для устойчивости полинома $f(s, \beta)$ [1]. Отметим, что корни полиномов $g(s)$ и $h(s)$ отрицательны и перемежаются.

Без ограничения общности можно считать, что старшие коэффициенты этих полиномов равны единице, в противном случае можно заменить β на $\frac{a_0}{b_0} \beta$, что не влияет на кривые $s_{mk}(\beta)$.

Очевидно, что полином $f(s, \beta)$ имеет симметричные и сопряженные корни $s_{mk}(\beta)$, $s_{mk}(-\beta) = -s_{mk}(\beta)$, $\bar{s}_{mk}(\beta)$. Параметр $-\infty \leq \beta \leq \infty$ определяет алгебраическую кривую (путь) в комплексной плоскости $\Gamma = \{s_{mk}(\beta) \in \mathbb{C} : \beta \in \mathbb{R}\}$. Корни полиномов $g(s^2)$, $h(s^2)$ принадлежат этой кривой, причём число точек t_j на две меньше числа точек s_k . При β , изменяющемся от 0 до ∞ , путь $s_{mk}(\beta)$ начинается в точке $s_{mk}(0) = is_k$ и приходит в некоторую точку $s_{mk}(\infty) = it_j$, причём при $\beta < 0$ $s_{mk}(\beta) = -\bar{s}_{mk}(-\beta)$. Кроме того, этому пути соответствует симметричный путь $\bar{s}_{mk}(\beta)$. Следовательно, достаточно рассматривать пути, находящиеся во втором квадранте.

Отметим, что два пути $s_{mk}(\beta)$ и $s_{mj}(\beta)$ могут пересекаться только в критической точке, т.е. точке s_0 , в которой $f'(s_0, \beta) = 0$, так как условие $f(s_0, \beta_1) = f(s_0, \beta_2) = 0$ влечёт равенство $\beta_1 = \beta_2$. Критическая точка является точкой ветвления кривых, проходящих через эту точку, но путь (аналитическая ветвь кривой) не имеет самопересечений, т.е. отображение $\beta \rightarrow s_{mk}(\beta)$ взаимнооднозначно.

Уравнения $g(s^2) + \beta sh(s^2) = 0$ и $\beta g(s^2) + sh(s^2) = 0$ определяют один и тот же путь. Параметрические представления этих путей связаны соотношением

$$\bar{s}_{mj}(\beta) = s_{mk} \left(\frac{1}{\beta} \right).$$

Путь $\bar{s}_{mj}(\beta)$ является образом вещественной оси функции, обратной к рациональной дроби $\beta = -\frac{sh(s^2)}{g(s^2)}$. Установить соответствие между точками is_k и it_j без дополнительной информации о полиномах g и h невозможно, но для пути, заканчивающегося в точке 0, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Путь, заканчивающийся в точке 0, имеет на вещественной оси критическую точку, в которой он распадается на две ветви: одна из них уходит в точку 0, а другая — в $-\infty$.*

Доказательство. Хорошо известно, что для отношения полиномов степени m , $m-1$ с перемежающимися корнями справедливо равенство

$$\frac{g(s)}{h(s)} = s + A + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{s + t_k^2}, \quad A = a_1 - b_1 > 0, \quad A_k = \frac{g(-t_k^2)}{h'(-t_k^2)} < 0. \quad (3)$$

где a_k , b_k — коэффициенты полиномов $g(s)$ и $h(s)$ соответственно. Неравенство $a_k - b_k > 0$ справедливо при $k = 1, \dots, m-1$, является следствием теоремы Виета и перемежаемости их корней. Из неравенств $g(0)$, $h(0) > 0$ и $-s_2^2 < -t_1^2 < -s_1^2 < 0$ следует, что $g(s) < 0$ на интервале $(-s_2^2, -s_1^2)$, а $h(s)$ возрастает в окрестности точки $-t_1^2$. Сохранение знака A_k является следствием перемежаемости корней (см. [2, гл. 1, теорема 6]). Отсюда вытекает, что решение уравнения

$$g(s^2) + \beta sh(s^2) = 0$$

равносильно решению уравнения

$$r(s, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} s^2 + \beta s + A = - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{s^2 + t_k^2} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{m-1}(s).$$

Очевидно, что $r(s, 0) > Q_{m-1}(0)$ и $Q_{m-1}(s)$ монотонно убывает. Минимум $r(s, \beta)$ достигается при $s = -\frac{\beta}{2}$ и равен $-\frac{\beta^2}{4} + A$. Так как Q_{m-1} положительна, то график параболы $r(s, \beta)$ пересекает график функции Q_{m-1} при значении β меньшем, чем значение β , при котором её график касается оси абсцисс ($= 2\sqrt{A}$). Обозначим точку касания графиков через s_n^* , а параметр — через β_n^* . При $\beta > \beta_n^*$ появляются два вещественных решения \bar{s}_n и $\bar{\bar{s}}_n$, для которых выполняются неравенства $\bar{\bar{s}}_n < s_n^* < \bar{s}_n$, при этом график параболы пересекает прямую $y = Q_{m-1}(0)$ в точках правее \bar{s}_n и левее $\bar{\bar{s}}_n$, отсюда следует оценка вещественных корней

$$-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + Q_{m-1}(0) - A} < \bar{\bar{s}}_n < s_n^* < \bar{s}_n < -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + Q_{m-1}(0) - A}, \quad \beta > \beta_n^*.$$

Утверждение доказано.

Отметим, что точка бифуркации является точкой касания графиков $r(s, \beta)$ и $Q_{m-1}(s)$, т.е. β_n^* , s_n^* являются решением системы уравнений

$$s^2 + \beta s + A = Q_{m-1}(s), \quad 2s + \beta = Q'_{m-1}(s).$$

Корни полинома со старшим коэффициентом, равным единице находятся или в круге радиусом единица, или в круге, радиус которого равен сумме модулей остальных коэффициентов. Следовательно, при $\beta \leq 1$ пути $s_{mk}(\beta)$ и $\tilde{s}_{mj}(\beta)$ ограничены. Так как они определяют один и тот же путь, то путь с начальной точкой is_i ($s_{mk}(0) = is_k$) и конечной $it_j \neq 0$ ограничен. Кроме того, в силу отмеченной симметрии, при изменении параметра β от $-\infty$ до $+\infty$ путь \tilde{s}_{mj} с начальной точкой it_j является замкнутым, проходящим через некоторую точку is_k ($\tilde{s}_{mj}(0) = is_k$) и содержащимся в соответствующем круге.

2. Локальное представление решения в окрестности простого корня

Пусть $g(z)$ и $h(z)$ — две голоморфные функции в круге $|z| < r$. При условии $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$, $h(0) \neq 0$ локальное представление решения уравнения

$$g(z) + \beta h(z) = 0$$

в окрестности точки 0 сводится к вычислению коэффициентов ряда Бурмана – Лагранжа (см. [3, стр. 214])

$$d_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{|\zeta|=r} (-1)^n \left(\frac{h(\zeta)}{g(\zeta)} \right)^n d\zeta = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{zh(z)}{g(z)} \right)^n. \quad (4)$$

Так как 0 — полюс первого порядка, то ряд Лорана в окрестности этой точки запишем в виде

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{h(0)}{g'(0)} \frac{1}{z} + \mathcal{R}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_0}{z} + \mathcal{R}(z),$$

где $\mathcal{R}(z)$ — функция, голоморфная в круге $|z| < r$.

Введём обозначения $\mathcal{R}^{(n)}(0) = R_n$ и $J(m, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\mathcal{R}(\zeta)^n}{\zeta^m} d\zeta$. В этих обозначениях коэффициенты d_n при $n \geq 2$ можно записать в виде

$$d_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{|\zeta|=r} (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{A_0}{\zeta} \right)^k [\mathcal{R}(\zeta)]^{n-k} d\zeta = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A_0^k J(k, n-k). \quad (5)$$

Здесь учтено, что интеграл от $[\mathcal{R}(\zeta)]^n$ и $\left(\frac{A_0}{\zeta} \right)^n$ равен нулю.

Для $J(m, n)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$J(m, n) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{R_k}{k!} J(m-k, n-1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{R_{m-1-k}}{(m-1-k)!} J(k+1, n-1), \quad n \geq 2, m \geq 1.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{|\zeta|=r, k=0}^{\infty} \frac{R_k}{k!} \zeta^k \frac{\mathcal{R}(\zeta)^{n-1}}{\zeta^m} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{|\zeta|=r, k=0}^{m-1} \frac{R_k}{k!} \frac{\mathcal{R}(\zeta)^{n-1}}{\zeta^{m-k}} d\zeta.$$

Кроме того,

$$J(m, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\mathcal{R}(\zeta)}{\zeta^m} d\zeta = \frac{R_{m-1}}{(m-1)!} \quad \text{и} \quad J(1, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\mathcal{R}^n(\zeta)}{\zeta} d\zeta = R_0^n.$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов ряда Бурмана–Лагранжа достаточно найти значения функции $\mathcal{R}(z)$ и её производных в заданной точке. В п.3 приведены формулы, позволяющие находить эти коэффициенты.

В частности, если в точке z_0 выполнены условия $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} d_0(z_0) &= z_0, \\ d_1(z_0) &= -\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}, \\ d_2(z_0) &= \left[\frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \right]^2 \left(\frac{h'(z_0)}{h(z_0)} - \frac{1}{2} \frac{g''(z_0)}{g'(z_0)} \right) = \frac{1}{2} d_1^2(z_0) \left(\ln \frac{h^2(z)}{g'(z)} \right)' \Big|_{z=z_0}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для полиномов $g(s)$, $h(s)$ локальное поведение функции $s_{mk}(\beta)$ в точке is_k определяется отношением $G(s) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{sh(s^2)}{g(s^2)}$, для которого справедливо равенство

$$G(s) = -\sum_{k=1}^m \frac{B_k s}{s^2 + s_k^2}, \quad B_k = \frac{h(-s_k^2)}{g(-s_k^2)} > 0.$$

Отметим, что $G(is) = -i \frac{sh(-s^2)}{g(-s^2)}$ принимает чисто мнимые значения, при этом функция $iG(is)$ взаимнооднозначно отображает интервал (s_k, s_{k+1}) $k = -m, \dots, m$, $k \neq 0$, $s_{m+1} = s_{-m}$ на вещественную ось \mathbb{R} (считаем, что $(s_m, +\infty) \cup [-\infty, s_{-m})$ одним интервалом (s_m, s_{-m})). Отсюда следует, что обратная к $G(s)$ функция $G^{-1}(s)$ определена на $2m$ -листной римановой поверхности, мнимая ось каждого листа которой взаимнооднозначно отображается на соответствующий интервал мнимой оси плоскости s .

Локальное поведение функции $\tilde{s}_{mk}(\beta)$ в точке it_k аналогично и определяется отношением $H(s) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g(s^2)}{sh(s^2)}$. Равенство (3) в этом случае запишется в виде

$$H(s) = s + \frac{A}{s} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k s}{s^2 + t_k^2}, \quad A = \frac{g(0)}{h(0)}, \quad A_k = \frac{g(-t_k^2)}{h'(-t_k^2)} < 0.$$

Функция $H^{-1}(s)$ определена на римановой поверхности, связанной с римановой поверхностью функции $G^{-1}(s)$ преобразованием $\beta \mapsto \frac{1}{\beta}$, при этом мнимая ось каждого листа переходит в интервалы (it_k, it_{k-1}) , $k = m, \dots, -m$, $t_m = +\infty$, $t_{-m} = -\infty$

В отличие от мнимой оси, поведение функций $G^{-1}(s)$ и $H^{-1}(s)$ на вещественной оси листа её римановой поверхности значительно сложнее. Локальное поведение этого образа определяется формулами (6). Несложно установить, что $d_1(s_k) = -\frac{h(-s_k^2)}{2g'(-s_k^2)}$ и $d_1(t_k) = -\frac{g(-t_k^2)}{2t_k^2 h'(-s_k^2)}$ вещественны и меньше нуля, а коэффициент d_2 является чисто мнимым и определяет направление пути $s_{mk}(\beta)$ относительно прямой $\Im z = is_k$ ($\Im z = it_k$). Относительно поведения пути в целом можно высказать следующую гипотезу: если $d_2(s_k) > 0$ и $d_2(t_k) < 0$ или $d_2(s_k) > 0$ и $d_2(t_{k-1}) < 0$ и путь $s_{mk}(\beta)$ не проходит через критическую точку, то он содержится в полосе $is_k \leq \Im z \leq it_k$ или $it_{k-1} \leq \Im z \leq is_k$, т.е. соединяет соответствующие точки.

3. Производящая функция для интегралов, определяющих коэффициенты Бурмана - Лагранжа d_n

В этом пункте приведена производящая функция для интегралов, позволяющая вычислять коэффициенты ряда Бурмана - Лагранжа (4).

Для интегралов $J(m, n)$ справедлива производящая функция

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m, n=0}^{\infty} J(m+1, n+1) x^m y^n = \frac{1}{(1-y\mathcal{R}(x))(1-R_0y)}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= \sum_{m=0}^{\infty} J(m+1, 1) x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R_m}{m!} x^m = \mathcal{R}(x), \\ F(0, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} J(1, n+1) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{n+1} y^n = \frac{R_0}{1-R_0y}, \\ F(x, y) &= F(0, y) + \sum_{n, m=0}^{\infty} J(m+1, n+2) x^m y^{n+1} = \\ &= F(0, y) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{R_{m-k}}{(m-k)!} J(k+1, n+1) x^m y^{n+1} = \\ &= F(0, y) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_m}{m!} J(k+1, n+1) x^{m+k} y^{n+1} = \\ &= F(0, y) + y\mathcal{R}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} J(n+1, k+1) x^m y^n = \frac{R_0}{1-R_0y} + y\mathcal{R}(x)F(x, y), \end{aligned}$$

следовательно,

$$F(x, y) = \frac{R_0}{(1-R_0y)(1-y\mathcal{R}(x))} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m [\mathcal{R}(x)]^k R_0^{m-k+1} y^m. \quad (7)$$

Для вычисления коэффициентов R_m можно использовать ряд Тейлора функции $\mathcal{R}(z)$. Пусть $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k$ и $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$. Тогда

$$\mathcal{R}(z) = \frac{h(z)}{g(z)} - \frac{A_0}{z} = \frac{1}{g_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} (g_1 h_{k+1} - h_0 g_{k+2}) z^k \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g_{l+1}}{g_1} z^l \right)^{-1},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z) &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{g_1^{m+2}} (g_1 h_{k+1} - h_0 g_{k+2}) \left(\sum_{l=0}^{\infty} g_{l+2} z^l \right)^m z^{k+m} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{g_1^{m+2}} (g_1 h_{k-m+1} - h_0 g_{k-m+2}) \left(\sum_{l=0}^{\infty} g_{l+2} z^l \right)^m \right] z^k. \quad (8) \end{aligned}$$

В частности, из (5) вытекает, что $d_2 = A_0 J(1,1)$, из (7) — $d_2 = A_0 R_0$, а (8) влечёт равенство (6).

Список литературы

- [1] Ильин И. П., Кузнецов Ю. И., *Трёхдиагональные матрицы и их приложения*, «Наука» ГРФМЛ, М., 1985, 208 с.
- [2] Чеботарёв Н. Г., Мейман Н. Н., «Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций», *Тр. МИАН СССР*, **26**, (1949), 3–331.
- [3] Шабат С., *Введение в комплексный анализ*, «Наука», ГРФМЛ, М., 1976, 320 с.

Поступила в редакцию
6 апреля 2026 г.

Работа выполнена в рамках государственного
задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00).

*Dmitriev A. A.*¹ On the roots of stable polynomials depending on the parameter. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2026. V. 26. No 1. P. 43–49.

¹Institute for Applied Mathematics Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia

ABSTRACT

This article examines the behavior of the roots of the characteristic polynomial of a stable system of linear differential equations as a function of a parameter.

Key words: *characteristic and stable polynomial.*