

УДК 517.54
MSC2020 30C55, 30C85

© В. Н. Дубинин¹

Угловые производные и производная Шварца голоморфного однолистного отображения круга в себя

Известное неравенство для произведения степеней угловых производных в граничных неподвижных точках голоморфного и однолистного отображения единичного круга в себя дополняется слагаемыми, включающими производную Шварца в начале координат.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, производная Шварца, приведённые модули.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202606>

1. Введение и формулировка результата

Исследования свойств голоморфных отображений круга в себя имеют богатую историю и дают возможность решать весьма сложные задачи в тех областях естествознания, где при описании процессов используется комплексная динамика. Особый интерес представляют задачи о граничных неподвижных точках, определяемых следующим образом (см. работы [1–15] и библиографию в них). Пусть f — голоморфная в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция, удовлетворяющая условию $|f(z)| < 1$ при $z \in D$, и пусть точка a принадлежит окружности $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Говорят, что граничная точка a является неподвижной для функции f , если $\angle \lim_{z \rightarrow a} f(z) = a$. Известно [1], что в граничной неподвижной точке существует (конечный или бесконечный) угловой предел

$$\angle \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - a}{z - a}. \quad (1)$$

Более того, если этот предел конечен, то он является положительным числом и $f'(z)$ имеет тот же угловой предел при $z \rightarrow a$. В этом случае предел (1) называется *угловой производной* функции f в точке $z = a$ и обозначается $f'(a)$.

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: vdubinin51@gmail.com

Среди многочисленных результатов о граничном искажении голоморфных функций выделим следующее неравенство [16, теорема 1]:

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\alpha_k^2} \geq 1, \tag{2}$$

Здесь f — голоморфное однолистное отображение круга D в себя, $z_k, k=1, \dots, n$, — произвольные различные неподвижные точки f на окружности T и $\alpha_k, k=1, \dots, n$, — любые вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$. Ранее [17] неравенство (2) было установлено в том частном случае, когда одна из граничных точек, пусть z_1 , «притягивающая» (т.е. $f'(z_1) \leq 1$), $\alpha_1 = -1$, а остальные точки «отталкивающие», причём $\alpha_k, k=2, \dots, n$, — неотрицательные числа, $\sum_{k=2}^n \alpha_k = 1$. В работе [17] показано также, что в этих условиях из (2) вытекает хорошо известное неравенство Кавена–Поммеренке [2, теорема 6. 1]

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\log f'(z_k)} \leq -\frac{1}{\log f'(z_1)},$$

где $f'(z_1) < 1$. Недавно получена теорема искажения для функции f , включающая оценку (2). Кроме того, показано, что знак равенства в (2) достигается для функций f , отображающих круг D_z на круг D_w с разрезами вдоль аналитических дуг, заданных уравнением

$$\frac{\partial}{\partial n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \log |w - z_k| = 0$$

[18, теорема 2]. В настоящей заметке неравенство (2) дополняется слагаемыми, содержащими, в частности, *производную Шварца*

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция f осуществляет конформное и однолистное отображение круга D в себя, $f(0) = 0, f(z) \neq z$, и пусть $z_k, k=1, \dots, n$, — произвольные различные неподвижные точки f на окружности T , а $\alpha_k, k=1, \dots, n$, — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$. Тогда для любого вещественного числа φ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \log f'(z_k) \geq \\ & \geq 1 - \frac{1}{|f'(0)|^2} - \frac{1}{6} \operatorname{Re} \left[e^{2i\varphi} \frac{S_f(0)}{(f'(0))^2} \right] + \operatorname{Re} \left[e^{i\varphi} \left(1 - \frac{1}{f'(0)} \right) \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{z}_k \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

В ряде случаев неравенство (3) превращается в равенство. Например, из доказательства теоремы 1 и свойств приведённых модулей видно, что если функция f отображает круг D_z на круг D_w с разрезом на вещественной оси (функция Пика) и если совокупность точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ симметрична относительно этой оси, причём в случае $z_k = \bar{z}_l$ выполняется $\alpha_k = \alpha_l$, то при $\varphi = 0$ в неравенстве (3) будет знак равенства.

При больших значениях α_k^2 , $k = 1, \dots, n$, неравенство (3) ведёт к (2). Наоборот, устремляя α_k к нулю, $k = 1, \dots, n$, при подходящем значении φ получим из (3) классическое неравенство Нехари [19]

$$|S_f(0)| \leq 6(1 - |f'(0)|^2),$$

справедливое безотносительно существования неподвижных точек. Новизна теоремы 1 состоит в присутствии крайнего справа слагаемого в (3). В частности, если это слагаемое отлично от нуля, то в (2) необходимо строгое неравенство.

2. Доказательство теоремы 1

Нам понадобится понятие *приведённого модуля*

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) \equiv M(B, \emptyset, Z, \Delta, \Psi).$$

Здесь B — открытое подмножество комплексной сферы $\bar{\mathbb{C}}$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^m$ — множество различных точек в $B \setminus \{\infty\}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^m$ — совокупность вещественных чисел, по крайней мере два из которых различны, $\sum_{k=1}^m \delta_k = 0$, и $\Psi = \{\mu_k r\}_{k=1}^m$, где μ_k , $k = 1, \dots, m$ — положительные числа, а $r > 0$ достаточно малый параметр (подробнее см. [20, часть 2.4]).

Пусть числа $r > 0$, $t > 0$ достаточно малы, и ρ , $0 < \rho < 1$, близко к единице. Положим $w_0 = te^{i\varphi}$, $w_k = \rho z_k$, $k = 1, \dots, n$, и рассмотрим следующие множества точек и чисел:

$$\begin{aligned} W^* &= \{w_0, -w_0, w_1, \dots, w_n, 1/\bar{w}_0, -1/\bar{w}_0, 1/\bar{w}_1, \dots, 1/\bar{w}_n\}, \\ \Delta^* &= \{1, -1, \beta_1, \dots, \beta_n, 1, -1, \beta_1, \dots, \beta_n\}, \\ \Psi^* &= \{r, r, r, \dots, r, r/t^2, r/t^2, r/|w_1|^2, \dots, r/|w_n|^2\}, \end{aligned}$$

где β_k , $k = 1, \dots, n$ — вещественные числа, $\sum_{k=1}^n \beta_k = 0$. Свойство монотонности приведённого модуля влечёт за собой

$$M(\bar{\mathbb{C}}_w, W^*, \Delta^*, \Psi^*) \leq M(f(D_z) \cup \{w : 1/\bar{w} \in f(D_z)\}, W^*, \Delta^*, \Psi^*).$$

Из принципа симметрии, конформной инвариантности и вновь принципа симметрии последовательно получаем

$$\begin{aligned} M(f(D_z) \cup \{w : 1/\bar{w} \in f(D_z)\}, W^*, \Delta^*, \Psi^*) &= \frac{1}{2} M(f(D_z), W, \Delta, \Psi) = \\ &= \frac{1}{2} M(D_z, Z, \Delta, \tilde{\Psi}) = M(\bar{\mathbb{C}}_z, Z^*, \Delta^*, \tilde{\Psi}^*). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
W &= \{w_0, -w_0, w_1, \dots, w_n\}, \quad \Delta = \{1, -1, \beta_1, \dots, \beta_n\}, \quad \Psi = \{r, r, r, \dots, r\}, \\
Z &= \{\zeta_0^+, \zeta_0^-, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}, \quad \zeta_0^+ = g(w_0), \quad \zeta_0^- = g(-w_0), \quad \zeta_k = g(w_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad g = f^{-1}, \\
\tilde{\Psi} &= \{r|g'(w_0)|, r|g'(-w_0)|, r|g'(w_1)|, \dots, r|g'(w_n)|\}, \\
Z^* &= \{\zeta_0^+, \zeta_0^-, \zeta_1, \dots, \zeta_n, 1/\bar{\zeta}_0^+, 1/\bar{\zeta}_0^-, 1/\bar{\zeta}_1, \dots, 1/\bar{\zeta}_n\}, \\
\tilde{\Psi}^* &= \left\{ r|g'(w_0)|, r|g'(-w_0)|, r|g'(w_1)|, \dots, r|g'(w_n)|, \right. \\
&\quad \left. r \left| \frac{g'(w_0)}{(\zeta_0^+)^2} \right|, r \left| \frac{g'(-w_0)}{(\zeta_0^-)^2} \right|, r \left| \frac{g'(w_1)}{\zeta_1^2} \right|, \dots, r \left| \frac{g'(w_n)}{\zeta_n^2} \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Окончательно

$$M(\bar{\mathbb{C}}_w, W^*, \Delta^*, \Psi^*) \leq M(\bar{\mathbb{C}}_z, Z^*, \Delta^*, \tilde{\Psi}^*).$$

Вычисляя приведённые модули комплексных сфер по формуле (2.17) из книги [20], приходим отсюда к следующему неравенству

$$\begin{aligned}
&\left[-2 \log \frac{1}{t^2} + 4 \log 2 - 2 \log \left| w_0 - \frac{1}{\bar{w}_0} \right| + 2 \log \left| w_0 + \frac{1}{\bar{w}_0} \right| + 2 \log \left| -w_0 - \frac{1}{\bar{w}_0} \right| - \right. \\
&-2 \log \left| -w_0 + \frac{1}{\bar{w}_0} \right| + \log |g'(w_0)g'(-w_0)| + \log \left| \frac{g'(w_0)g'(-w_0)}{(\zeta_0^+\zeta_0^-)^2} \right| - 2 \log |\zeta_0^+ - \zeta_0^-| - \\
&-2 \log \left| \frac{1}{\bar{\zeta}_0^+} - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^-} \right| + 2 \log \left| \zeta_0^+ - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^+} \right| - 2 \log \left| \zeta_0^+ - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^-} \right| - 2 \log \left| \zeta_0^- - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^+} \right| + \\
&+ 2 \log \left| \zeta_0^- - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^-} \right| \left. \right] + \left[-2 \sum_{k=1}^n \beta_k \left(\log |w_0 - w_k| + \log \left| w_0 - \frac{1}{\bar{w}_k} \right| \right) + \right. \\
&+ 2 \sum_{k=1}^n \beta_k \left(\log |-w_0 - w_k| + \log \left| w_0 + \frac{1}{\bar{w}_k} \right| \right) + \\
&+ 2 \sum_{k=1}^n \beta_k \left(\log |\zeta_0^+ - \zeta_k| + \log \left| \zeta_0^+ - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right| \right) - 2 \sum_{k=1}^n \beta_k \left(\log |\zeta_0^- - \zeta_k| + \log \left| \zeta_0^- - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right| \right) \left. \right] + \\
&+ \left[- \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \log \frac{1}{|w_k|^2} - 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \beta_k \beta_l \log |w_k - w_l| - 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \beta_k \beta_l \log \left| \frac{1}{w_k} - \frac{1}{w_l} \right| - \right. \\
&- 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_k \beta_l \log \left| w_k - \frac{1}{\bar{w}_l} \right| + \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \log |g'(w_k)| + \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \log \left| \frac{g'(w_k)}{\zeta_k^2} \right| + \\
&+ 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \beta_k \beta_l \log |\zeta_k - \zeta_l| + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \beta_k \beta_l \log \left| \frac{1}{\zeta_k} - \frac{1}{\zeta_l} \right| + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_k \beta_l \log \left| \zeta_k - \frac{1}{\bar{\zeta}_l} \right| \left. \right] \leq 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Перейдем в неравенстве (4) к пределу при $\rho \rightarrow 1$ (тогда $w_k \rightarrow z_k$, $\zeta_k \rightarrow z_k$, $f'(\zeta_k) \rightarrow f'(z_k)$, $g'(w_k) \rightarrow 1/f'(z_k)$, $k = 1, \dots, n$).

После предельного перехода выражение в последней квадратной скобке в (4) принимает вид

$$-2 \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \log f'(z_k).$$

Пусть

$$g(w) = c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \dots$$

Простые вычисления показывают, что после $\rho \rightarrow 1$ сумма в первой скобке в (4) равна

$$\log \left| 1 + 8 \left[e^{2i\varphi} \left(\frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) + 1 - |c_1|^2 \right] t^2 + o(t^2) \right|, \quad t \rightarrow 0.$$

Учитывая равенства

$$c_1 = \frac{1}{f'(0)}, \quad \frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1}{6} S_g(0) = -\frac{S_f(0)}{6(f'(0))^2},$$

получаем следующее представление этой суммы:

$$\left[-\frac{4}{3} \operatorname{Re} \frac{S_f(0)e^{2i\varphi}}{(f'(0))^2} + 8 \left(1 - \frac{1}{|f'(0)|^2} \right) \right] t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Выражение во второй скобке в (4) после $\rho \rightarrow 1$ представлено в виде

$$8 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \beta_k \left[t e^{i\varphi} \left(1 - \frac{1}{f'(0)} \right) \bar{z}_k + o(t) \right], \quad t \rightarrow 0.$$

Таким образом, неравенство (4) влечёт за собой

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{4}{3} \operatorname{Re} \frac{S_f(0)e^{2i\varphi}}{(f'(0))^2} + 8 \left(1 - \frac{1}{|f'(0)|^2} \right) \right] t^2 + o(t^2) + \\ & + 8 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \beta_k \left[t e^{i\varphi} \left(1 - \frac{1}{f'(0)} \right) \bar{z}_k + o(t) \right] - 2 \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \log f'(z_k) \leq 0. \end{aligned}$$

Положив здесь $\beta_k = \alpha_k t$ и затем поделив на t^2 , приходим при $t \rightarrow 0$ к неравенству (3). Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Ahlfors L. V., *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, McGraw–Hill Series in Higher Mathematics, McGraw–Hill Book Co., New York–Dusseldorf–Johannesburg, 1973.
- [2] Cowen C. C., Pommerenke Ch., “Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk”, *J. London Math. Soc.*, **26**:2, (1982), 271–289.
- [3] Pommerenke Ch., *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [4] Солянин А. Ю., “Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **204**, (1993), 115–142.

-
- [5] Burns D. M., Krantz S. G., “Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary”, *J. Amer. Math. Soc.*, **7**:3, (1994), 661–676.
- [6] Pommerenke Ch., Vasil’ev A., “On bounded univalent functions and the angular derivative”, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A*, **54**, (2000), 79–106.
- [7] Tauraso R., Vlacci F., “Rigidity at the boundary for holomorphic self-maps of the unit disk”, *Complex Variables Theory Appl.*, **45**:2, (2001), 151–165.
- [8] Anderson J. M., Vasil’ev A., “Lower Schwarz–Pick estimates and angular derivatives”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **33**:1, (2008), 101–110.
- [9] Shoikhet D., “Another look at the Burns–Krantz theorem”, *J. Anal. Math.*, **105**:1, (2008), 19–42.
- [10] Горяйнов В. В., “Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками”, *Матем. сб.*, **208**:3, (2017), 54–71.
- [11] Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С., Солодов А. П., “Итерации голоморфных отображений, неподвижные точки и области однолиственности”, *УМН*, **77**:6(468), (2022), 3–68.
- [12] Кудрявцева О. С., Солодов А. П., “Область однолиственности на классе голоморфных отображений круга в себя с двумя граничными неподвижными точками”, *УМН*, **78**:6(474), (2023), 185–186.
- [13] Кудрявцева О. С., “Точные области взаимного изменения коэффициентов голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками”, *Изв. вузов. Матем.*, **5**, (2023), 48–57.
- [14] Кудрявцева О. С., Солодов А. П., “Область однолистного покрытия на классе голоморфных отображений круга в себя с двумя граничными неподвижными точками”, *Матем. заметки*, **116**:4, (2024), 632–635.
- [15] Кудрявцева О. С., Солодов А. П., “Точные области однолиственности и однолистного покрытия на классе голоморфных отображений круга в себя с двумя граничными неподвижными точками”, *Матем. сб.*, **216**:4, (2025), 44–66.
- [16] Дубинин В. Н., Ким В. Ю., “Обобщенные конденсаторы и теоремы о граничном искажении при конформном отображении”, *Дальневост. матем. журн.*, **13**:2, (2013), 196–208.
- [17] Contreras M. D., Diaz-Madrigal S., Vasile’v A., “Digons and angular derivatives of analytic self-maps of the unit disk”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **52**:8, (2007), 685–691.
- [18] Dubinin V. N., “On holomorphic self-maps of a disk with fixed points”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **47**:2, (2026), 507–513.
- [19] Nehari Z., “Some inequalities in the theory of functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75**:2, (1953), 256–286.
- [20] Dubinin V. N., *Condenser Capacities and Symmetrization in Geometric Function Theory*, Springer, Basel, 2014.

Поступила в редакцию
13 февраля 2026 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00).

*Dubinin V. N.*¹ Angular derivatives and Schwarzian derivative of holomorphic univalent self-maps of a disk. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2026. V. 26. No 1. P. 50–56.

¹Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The well-known inequality for the product of powers of angular derivatives at boundary fixed points of a holomorphic mapping of the unit disk into itself is supplemented by terms that include the Schwarzian derivative at the origin.

Key words: *holomorphic map, fixed points, Schwarzian derivative, reduced moduli.*