Дальневосточный математический журнал. 2026. Т. 26. № 1. С. 68–76

УДК 517.54
MSC2020 30C55 + 30C80

© А. В. Олесов[1]

Об одной теореме для мажорантных аналитических функций

Для функций $\omega(z)$ и $f(z)$, однозначных и аналитических на всей комплексной плоскости с изолированными особыми точками, таких, что $f(z) \equiv \overline{f(\overline{z})}$,

$$|\omega(\overline{z})/\omega(z)| < 1 \quad \text{и} \quad |f(z)/\omega(z)| < 1 \quad \text{при} \quad \Im z > 0,$$

получены дифференциальные неравенства в нулях дроби $\overline{\omega(\overline{z})}/\omega(z)$ с определением всех случаев равенства. Доказанные неравенства эквивалентны неравенствам теоремы 3 работы [1], при доказательстве которой допущена ошибка.

Ключевые слова: *мажорантные аналитические функции, однолистные функции, неравенства.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202608

Введение

В работах В. Н. Дубинина [2–4] представлен способ получения неравенств для полиномов и рациональных функций, содержание которого, в общих чертах, сводится к следующему. По заданному полиному или рациональной функции строится конформное и однолистное отображение, а затем к этому отображению применяются результаты геометрической теории функций комплексного переменного (см. [5]). Этот подход развивается в статье [1], где получен ряд результатов для аналитических функций, удовлетворяющих условиям мажорантности Меймана. При доказательстве теоремы 3 работы [1] допущена ошибка — неверно утверждается, что «точка a не может быть существенно особой точкой функций $\omega(z)$ и $\overline{\omega}(z)$». В настоящей работе эта ошибка исправлена путем изменения подхода к выводу неравенств, что позволило получить неравенства в простом и удобном для приложений виде. В отличие от работы [1] приводится полное и подробное доказательство утверждения о равенстве с включением случая $\lim\limits_{z\to a}\{f(z)/\omega(z)\} = 0$. Используя [6, предложения 6 и 7], можно показать, что частным случаем доказанной теоремы является теорема 3 работы [7], усиливающая и обобщающая классический результат Л. Фейера для коэффициентов тригонометрического полинома. В конце статьи доказывается эквивалентность полученных неравенств и неравенств теоремы 3 работы [1].

[1] Морской государственный университет имени адмирала Г. И. Невельского, 690059, г. Владивосток, ул. Верхнепортовая, 50а. Электронная почта: `olesov.alexander@gmail.com`

1. Формулировка основного результата

Функцию, принимающую в вещественных точках своей области определения вещественные значения, будем называть *вещественной*. Однозначные аналитические на всей комплексной плоскости функции с изолированными особыми точками будем называть *допустимыми*. Для допустимой функции $f(z)$ будем полагать по определению $\overline{f}(z)=\overline{f(\overline{z})}$.

Определим класс $\mathcal{E}$ как совокупность допустимых функций $\omega(z)$ таких, что

$$\left|\frac{\omega(\overline{z})}{\omega(z)}\right| < 1 \quad \text{при} \quad \Im z > 0.$$

Для функции $\omega(z)\in\mathcal{E}$ используется представление $\omega(z)=s(z)+it(z)$, где

$$s(z) = \frac{\omega(z)+\overline{\omega}(z)}{2}, \qquad t(z) = \frac{\omega(z)-\overline{\omega}(z)}{2i}$$

— вещественные допустимые функции.

Для функции $\omega(z)\in\mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{A}_R(\omega)$ совокупность допустимых вещественных функций $f(x)$ таких, что

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| < 1 \quad \text{при} \quad \Im z > 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $\omega(z) = s(z) + it(z) \in \mathcal{E}$, *и пусть* a — *нуль дроби* $\overline{\omega}(z)/\omega(z)$. *Тогда для функции* $f(z) \in \mathcal{A}_R(\omega)$ *имеем*

$$|d(a)| + |d'(a)|\Im a \leqslant 1, \quad \textit{если} \quad a \text{ — \textit{кратный нуль}}, \tag{1}$$

$$|d^2(a)| + \left|\left\{d^2(z) - 2\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right\}'_{z=a}\right|\Im a \leqslant 1, \quad \textit{если} \quad a \text{ — \textit{простой нуль}}, \tag{2}$$

где $d(z)=2f(z)/\omega(z)$. *Для функции* $f(z)$ *вида*

$$f(z) = As(z) + Bt(z), \quad A,\, B \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 = 1, \tag{3}$$

имеет место равенство в (1) *и* (2). *Если функция* $f(z)$ *отлична от* (3), *то равенство в* (1) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$|\overline{\omega}(z)/\omega(z)| \equiv |(z-a)/(z-\overline{a})|^2, \tag{4}$$

а функция $f(z)$ *имеет вид*

$$f(z) = \lambda[As(z) + Bt(z)] \pm (1-\lambda)\sqrt{s^2(z)+t^2(z)}, \tag{5}$$

где $A, B\in\mathbb{R}$, $A^2+B^2=1$, $0\leqslant\lambda<1$; *равенство в* (2) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$|\overline{\omega}(z)/\omega(z)| \equiv |(z-a)/(z-\overline{a})|, \tag{6}$$

а функция $f(z)$ *имеет вид*

$$f(z) = \lambda[As(z) + Bt(z)], \quad A,\, B \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 = 1, \quad 0 \leqslant \lambda < 1. \tag{7}$$

2. Построение конформного отображения

В работе используются следующие обозначения:

$$\Psi(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right),$$

$$\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad z \notin [-1, 1],$$

— ветвь функции, обратной к функции Жуковского $z = \Psi(w)$, однолистно отображающая внешность отрезка $[-1, 1]$ на область $|w| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi(1) = 1$. Отметим, что $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z)/z = 2$,

$$\lim_{z\to x\pm i0} \Phi(z) = x \pm i\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1,\, 1],$$

$$\Psi\left[\Phi^2(z)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^2 + \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^2\right] = 2z^2 - 1.$$

Пусть $\omega(z) \in \mathcal{E}$ и $f(z) \in \mathcal{A}_R(\omega)$. Положим

$$\Omega(z) = \frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}, \qquad \rho(z) = \frac{f(z)}{\omega(z)}\sqrt{\Omega(z)} = \frac{f(z)}{\sqrt{s^2(z) + t^2(z)}},$$

$$L(z) = \frac{\Phi[\rho(z)]}{\sqrt{\Omega(z)}} = \frac{\Phi\left[\sqrt{\Omega(z)}f(z)/\omega(z)\right]}{\sqrt{\Omega(z)}},$$

где значения $\sqrt{\Omega(z)}$ в числителе и знаменателе последней дроби совпадают. Функция $L(z)$ является однозначной и аналитической на множестве

$$D_z = \{z : \Im z > 0,\ \rho(z) \notin [-1,\, 1]\}.$$

Это следует из нечетности $\Phi(z)$ и того, что полюсы дроби $\Omega(z)$, удовлетворяющие условию $\rho(z) \notin [-1, 1]$, являются устранимыми особыми точками функции $L(z)$. Функция $L(z)$ ограничена на D_z; тогда в силу обобщенного принципа максимума модуля $|L(z)| \leqslant 1$ при $z \in D_z$.

Всюду ниже χ — совокупность нулей дроби $\overline{\omega}(z)/\omega(z)$; $\chi_1 \subset \chi$ — множество простых нулей;

$$\lambda(a) = 2\lim_{z\to a}\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right|, \qquad a \in \chi.$$

Пусть $a \in \chi$, $\lambda(a) \neq 0$, и пусть

$$z(w) = \frac{\overline{a}w + a}{w + 1}$$

— функция, конформно и однолистно отображающая круг $|w| < 1$ на верхнюю полуплоскость так, что $z(0) = a$; $w(z) = -\frac{z-a}{z-\overline{a}}$ — функция, обратная к $z(w)$. Рассмотрим мероморфную на множестве $D_w = w(D_z)$ функцию

$$G(w) = wL^{-k(a)}[z(w)], \quad \text{где} \quad k(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in \chi \setminus \chi_1 \\ 2, & \text{если } a \in \chi_1 \end{cases}. \tag{8}$$

Следующее утверждение установлено в [1, с. 158] с помощью [3, лемма 2.1].

Лемма 1. *Для любой компоненты связности D множества $D_w \setminus \{w : |G(w)| = 1\}$, выполняется*

$$\textit{либо} \quad G(D) \cap \{\zeta : |\zeta| < 1\} = \varnothing, \quad \textit{либо} \quad G(D) = \{\zeta : |\zeta| < 1\}.$$

Во втором случае существует обратная к $\zeta = G(w)$ функция $w = \mathrm{g}(\zeta)$, конформно и однолистно отображающая круг $|\zeta| < 1$ на область D так, что $\mathrm{g}(0) = 0$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\lambda(a) \neq 0$, и пусть $\zeta = G(w)$ — функция (8), $w = \mathrm{g}(\zeta)$ — функция из леммы 1. Рассмотрим в проколотой окрестности точки $w = 0$ функцию

$$P(w) = w\frac{G'(w)}{G(w)} = 1 - k(a)z'(w)w\frac{L'[z(w)]}{L[z(w)]}.$$

Поскольку $z'(0) = -2\Im a$, то

$$\lim_{w\to 0}\frac{P(w)-1}{w} = 2k(a)\Im a\frac{L'(a)}{L(a)}.$$

В проколотой окрестности точки $z = a$

$$\Phi[\rho(z)] = \rho(z)\left[1 + \sqrt{1-\rho^{-2}(z)}\right], \quad \lim_{z\to a}\sqrt{1-\rho^{-2}(z)} = 1.$$

Вследствие этого

$$L(z) = \frac{f(z)}{\omega(z)}\left[1 + \sqrt{1-\rho^{-2}(z)}\right],$$

$$\{\ln L(z)\}' = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} - \frac{[\rho^{-2}(z)]'}{2\sqrt{1-\rho^{-2}(z)}[1+\sqrt{1-\rho^{-2}(z)}]}.$$

Отсюда и из равенства

$$\lim_{z\to a}\left\{\rho^{-2}(z)\right\}' = \lim_{z\to a}\left\{\frac{\omega^2(z)\overline{\omega}(z)}{f^2(z)\omega(z)}\right\}' = \lim_{z\to a}\frac{\omega^2(z)}{f^2(z)}\left\{\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right\}'$$

находим, что

$$\frac{L'(a)}{L(a)} = \lim_{z\to a}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} - \frac{1}{4}\frac{\omega^2(z)}{f^2(z)}\left[\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right]'\right\}.$$

На основании правила Лопиталя

$$\lim_{w\to 0}\frac{P(w)-1}{w} = \lim_{w\to 0}\frac{\{wG'(w) - G(w)\}'}{\{wG(w)\}'} = \frac{G''(0)}{2G'(0)}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{g}''(0) = -G''(0)[\mathrm{g}'(0)]^3 = -4k(a)\Im a\frac{L'(a)}{L(a)}[\mathrm{g}'(0)]^2.$$

Известно (см. [8, с. 40, 222], [9, с. 94]), что для регулярной и однолистной в круге $|\zeta|<1$ функции

$$\mathrm{g}^*(\zeta)=\zeta+\alpha_2\zeta^2+\alpha_3\zeta^3+\ldots, \tag{9}$$

по модулю меньшей, чем μ^{-1}, $0<\mu\leqslant 1$, справедливо неравенство

$$|\alpha_2|\leqslant 2(1-\mu),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда при некотором $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{g}^*(\zeta)}{[1+e^{i\alpha}\mu\mathrm{g}^*(\zeta)]^2}\equiv\frac{\zeta}{(1+e^{i\alpha}\zeta)^2}. \tag{10}$$

В разложении (9) функции

$$\mathrm{g}^*(\zeta)=\mathrm{g}(\zeta)/\mathrm{g}'(0), \tag{11}$$

однолистной в круге $|\zeta|<1$ и по модулю меньшей, чем $[\lambda(a)]^{-k(a)}$,

$$\alpha_2=-2k(a)\Im a\frac{L'(a)}{L(a)}[\lambda(a)]^{k(a)}.$$

Следовательно,

$$k(a)\Im a\left|\frac{L'(a)}{L(a)}\right|[\lambda(a)]^{k(a)}\leqslant 1-[\lambda(a)]^{k(a)},$$

то есть

$$[\lambda(a)]^{k(a)}\Big(1+k(a)\Im a\lim_{z\to a}|D(z)|\Big)\leqslant 1, \tag{12}$$

где $D(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}-\frac{1}{4}\frac{\omega^2(z)}{f^2(z)}\left[\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right]'$. Данное неравенство совпадает с неравенством (1) или (2) в зависимости от кратности a.

Докажем утверждение о равенстве при $\lambda(a)\neq 0$. Если $f(z)$ имеет вид (3), то есть

$$f(z)=\frac{\eta\omega(z)+\overline{\eta}\,\overline{\omega}(z)}{2},\quad \eta=A-iB,$$

то $\lambda(a)=1$, что влечет за собой равенства в (1) и (2). Равенство $\lambda(a)=1$ имеет место только для функций вида (3). Действительно, если $\lambda(a)=1$, то $|L(a)|=1$, и по принципу максимума модуля

$$\frac{\Phi\big[\sqrt{\Omega(z)}f(z)/\omega(z)\big]}{\sqrt{\Omega(z)}}\equiv\eta,\quad \text{где}\quad |\eta|=1.$$

В этом случае $f(z)=\frac{\omega(z)}{\sqrt{\Omega(z)}}\Psi\Big[\eta\sqrt{\Omega(z)}\Big]=[\eta\omega(z)+\overline{\eta}\overline{\omega}(z)]/2$ — функция вида (3). Пусть $0<\lambda(a)<1$. Тождество (10) для функции (11) примет вид

$$\frac{\mathrm{g}(\zeta)}{\mu e^{i\gamma}[1+e^{i\beta}\mathrm{g}(\zeta)]^2}\equiv\frac{\zeta}{(1+e^{i\alpha}\zeta)^2},\quad \text{где}\quad \gamma=\arg\mathrm{g}'(0),\quad \beta=\alpha-\gamma,\quad \mu=[\lambda(a)]^{k(a)}.$$

Следовательно, функция (11) удовлетворяет тождеству (10) в точности тогда, когда в окрестности точки $w=0$

$$\frac{[1+e^{i\alpha}G(w)]^2}{G(w)}\equiv\frac{\mu e^{i\gamma}(1+e^{i\beta}w)^2}{w},\quad \text{то есть}\quad \Psi[e^{i\alpha}G(w)]\equiv\mu\Psi(e^{i\beta}w)+\mu-1.$$

Данное тождество равносильно тождеству $1/G(w) \equiv e^{i\alpha}\Phi\left[\mu\Psi(e^{i\beta}w)+\mu-1\right]$, которое запишем в виде

$$\Phi^{k(a)}\left[\rho(z)\right] \equiv \left\{\sqrt{\Omega(z)}\right\}^{k(a)} we^{i\alpha}\Phi\left[\mu\Psi(e^{i\beta}w)+\mu-1\right], \quad z=z(w). \tag{13}$$

Применяя к обеим частям (13) функцию Ψ, получим

$$\frac{f(z)}{\omega(z)} \equiv \frac{\Psi\left[\sqrt{\Omega(z)}we^{i\alpha}\Phi(\mu\Psi(e^{i\beta}w)+\mu-1)\right]}{\sqrt{\Omega(z)}}, \quad z=z(w), \quad \text{если} \quad a\in\chi\setminus\chi_1, \tag{14}$$

$$\frac{f^2(z)}{\omega^2(z)} \equiv \frac{\Psi\left[\Omega(z)we^{i\alpha}\Phi(\mu\Psi(e^{i\beta}w)+\mu-1)\right]+1}{2\Omega(z)}, \quad z=z(w), \quad \text{если} \quad a\in\chi_1. \tag{15}$$

Если (14) или (15) имеет место в окрестности точки $w=0$, то имеет место (13). Таким образом, функция (11) удовлетворяет (10) тогда и только тогда, когда в окрестности точки $w=0$ выполняется тождество (14) или (15). В силу принципа максимума модуля

$$\left|w\left\{\sqrt{\Omega(z)}\right\}^{k(a)}\right|^{-1} = \left|\frac{z-\overline{a}}{z-a}\right|\left|\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right|^{k(a)/2} \leqslant 1, \quad z=z(w), \quad |w|<1.$$

Если данное неравенство является строгим, то вследствие двузначности функции $\Phi(z)$ в точках интервала $(-1,1)$ функция в правой части (14) или (15) не может быть однозначно аналитически продолжена в точки

$$w=re^{-i\beta}, \quad 1/\Phi(2\mu^{-1}-1)<r<1,$$

что противоречит однозначности функции в левой части. Правая часть (14) однозначна в точности тогда, когда

$$\Omega[z(w)]w^2e^{i2\alpha} \equiv 1. \tag{16}$$

При выполнении (16) тождество (14) примет вид

$$\frac{f(z)}{\omega(z)} \equiv \mu\Psi\left[e^{i(\alpha-\gamma)}w\right]we^{i\alpha}+(\mu-1)we^{i\alpha} \equiv \frac{\mu}{2}\left[\frac{e^{-i\gamma}}{\Omega(z)}+e^{i\gamma}\right]+\frac{\mu-1}{\sqrt{\Omega(z)}},$$

где $z=z(w)$, $\sqrt{\Omega(z)}=\frac{1}{e^{i\alpha}w(z)}$, то есть

$$f(z) \equiv \mu\frac{e^{i\gamma}\omega(z)+e^{-i\gamma}\overline{\omega}(z)}{2}+(\mu-1)\frac{\omega(z)}{\sqrt{\Omega(z)}}. \tag{17}$$

Правая часть (15) однозначна в точности тогда, когда

$$\Omega[z(w)]we^{i\alpha} \equiv \pm 1. \tag{18}$$

При выполнении (18) тождество (15) примет вид

$$\frac{f^2(z)}{\omega^2(z)} \equiv e^{i\alpha}w\left[\mu\Psi(e^{i\beta}w)+\mu-1\pm 1\right], \quad z=z(w). \tag{19}$$

Если правая часть (18) равна -1, то функция в правой части (19) имеет простой нуль в точке $w = e^{-i\beta}/\Phi(2\mu^{-1}-1)$, что несовместимо с кратностью нулей функции в левой части. Если правая часть (18) равна 1, то тождество (19) представимо в виде

$$f(z) \equiv \pm\sqrt{\mu}\frac{e^{i\gamma/2}\omega(z) + e^{-i\gamma/2}\overline{\omega}(z)}{2}. \tag{20}$$

Функция (17) имеет вид (5), а функция (20) имеет вид (7). Обратно, если выполняется тождество (4), а функция $f(z)$ имеет вид (5) при $\lambda \neq 0$, то имеют место тождества (16) и (17) при $\mu = \lambda$ и некоторых $\alpha, \gamma \in (-\pi, \pi]$. При этом

$$\mathrm{g}'(0) = \lim_{z\to a} L(z) = 2\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{\omega(z)} = \mu e^{i\gamma},$$

откуда $\arg \mathrm{g}'(0) = \gamma$ и $\lambda(a) = \mu$. Если выполняется тождество (6), а функция $f(z)$ имеет вид (7) при $\lambda \neq 0$, то $\Omega(z) w e^{i\alpha} \equiv 1$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$, и имеет место (20) при $\mu = \lambda^2$ и некотором $\gamma \in (-\pi, \pi]$. При этом

$$\mathrm{g}'(0) = \lim_{z\to a} L^2(z) = 4\lim_{z\to a}\frac{f^2(z)}{\omega^2(z)} = \mu e^{i\gamma},$$

откуда $\arg \mathrm{g}'(0) = \gamma$ и $[\lambda(a)]^2 = \mu$. Этим завершается доказательство теоремы при $\lambda(a) \neq 0$.

Пусть $\lambda(a) = 0$ и $a \in \chi \setminus \chi_1$. По принципу максимума модуля

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\frac{z-\overline{a}}{z-a}\right| \leqslant 1, \quad \Im z > 0.$$

В пределе при $z \to a$ получим неравенство $|d'(a)|\Im a \leqslant 1$, то есть (1). Равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\frac{z-\overline{a}}{z-a}\right| \equiv 1. \tag{21}$$

Если выполняется (21), то при некотором $\varphi \in \mathbb{R}$ справедливо тождество

$$f(z)\frac{z-\overline{a}}{z-a}e^{i\varphi} \equiv \omega(z), \quad \text{равносильное тождеству} \quad f(z)\frac{z-a}{z-\overline{a}}e^{-i\varphi} \equiv \overline{\omega}(z).$$

Из этих тождеств вытекает (4), а также (5) при $\lambda = 0$. Непосредственно проверяется, что из (4) и (5) при $\lambda = 0$ вытекает (21).

Пусть $\lambda(a) = 0$ и $a \in \chi_1$. По принципу максимума модуля

$$\left|\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\frac{z-\overline{a}}{z-a}\right| \leqslant 1, \quad \Im z > 0.$$

В пределе при $z \to a$ получим неравенство

$$2\left|\left\{\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right\}'_{z=a}\right|\Im a \leqslant 1,$$

то есть (2). Необходимым и достаточным условием равенства в последнем неравенстве является (6). Пусть выполняется (6). Тогда при некотором $\varphi\in\mathbb{R}$

$$\omega^2(z)\equiv\frac{\overline{\omega}(z)\omega(z)(z-\overline{a})(z-a)}{(z-a)^2}e^{i\varphi}.$$

Отсюда $|\omega(z)|\equiv|\varphi(z)/(z-a)|$, где $\varphi(z)$ — некоторая вещественная допустимая функция. Поскольку $\lambda(a)=0$, в силу принципа максимума модуля

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\frac{z-\overline{a}}{z-a}\right|=\left|\frac{f(z)(z-\overline{a})}{\varphi(z)}\right|\leqslant 1,\quad \Im z>0.$$

Следовательно, вещественная функция $u(z)=f(z)/\varphi(z)$ ограничена в верхней полуплоскости, а значит, и в $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля $u(z)\equiv\text{const}$, что вместе с последним неравенством влечет за собой $u(z)\equiv 0$, то есть $f(z)\equiv 0$. Теорема доказана.

В работе [1] было доказано неравенство (12) (для случая $\lambda(a)\neq 0$), в котором вместо функции $D(z)$ бралась функция

$$\tilde{D}(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\left(1+\frac{H(z)}{2f^2(z)}\right)-\frac{s'(z)}{s(z)}\left(1+\frac{H(z)}{2s^2(z)}\right)+\frac{H'(z)}{4}\left(\frac{1}{s^2(z)}-\frac{1}{f^2(z)}\right),$$

где $H(z)=\overline{\omega}(z)\omega(z)$. Покажем, что $\lim\limits_{z\to a}\tilde{D}(z)=\lim\limits_{z\to a}D(z)$. Действительно, легко видеть, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{H'(z)}{2H(z)}=\frac{1}{2}\left[\frac{f^2(z)}{\omega^2(z)}\right]'\frac{\omega^2(z)}{f^2(z)}-\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right]'\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}.$$

Отсюда, так как $\overline{\omega}(z)/\omega(z)\to 0$ при $z\to a$, получаем

$$\lim_{z\to a}\left\{\frac{H(z)}{2f^2(z)}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{H'(z)}{2H(z)}\right]\right\}=-\frac{1}{4}\lim_{z\to a}\frac{\omega^2(z)}{f^2(z)}\Delta,$$

$$\lim_{z\to a}\left\{\frac{H(z)}{2s^2(z)}\left[\frac{s'(z)}{s(z)}-\frac{H'(z)}{2H(z)}\right]\right\}=-\Delta,\quad \text{где}\quad \Delta=\lim_{z\to a}\left[\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right]'.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{H(z)}{2f^2(z)}-\frac{s'(z)}{s(z)}\frac{H(z)}{2s^2(z)}+\frac{H'(z)}{4}\left(\frac{1}{s^2(z)}-\frac{1}{f^2(z)}\right)\\ =\frac{H(z)}{2f^2(z)}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{H'(z)}{2H(z)}\right]-\frac{H(z)}{2s^2(z)}\left[\frac{s'(z)}{s(z)}-\frac{H'(z)}{2H(z)}\right]\to\Delta-\frac{1}{4}\lim_{z\to a}\frac{\omega^2(z)}{f^2(z)}\Delta\end{gathered}$$

при $z\to a$. Остается заметить, что

$$\begin{gathered}\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{s'(z)}{s(z)}=\left[\ln\frac{f(z)}{s(z)}\right]'=\left\{\ln\frac{f(z)}{\omega(z)}-\ln\left[1+\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right]\right\}'\\ =\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}-\left[\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right]'\Big/\left[1+\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right].\end{gathered}$$

Список литературы

[1] Олесов А. В., “Неравенства для мажорантных аналитических функций”, *Зап. научн. семин. ПОМИ.*, **314**, (2004), 155–173.

[2] Дубинин В. Н., “Теоремы искажения для полиномов на окружности”, *Мат. сб.*, **191**:12, (2000), 51–60.

[3] Дубинин В. Н., “Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов”, *Алгебра и анализ*, **13**:5, (2001), 16–43.

[4] Дубинин В. Н., “О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций”, *Изв. РАН сер. мат.*, **66**:2, (2002), 67–80.

[5] Дубинин В. Н., “Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов”, *УМН*, **67**:4, (2012), 3–88.

[6] Олесов А. В., “Неравенства для мажорантных аналитических функций и их приложения к рационально-тригонометрическим функциям и полиномам”, *Матем. сб.*, **205**:10, (2014), 47–76.

[7] Олесов А. В., “О применении конформных отображений к неравенствам для тригонометрических полиномов”, *Математические заметки*, **76**:3, (2004), 396–408.

[8] Полиа Г., Сеге Г., *Задачи и теоремы из анализа, ч. 2*, ГИТТЛ, М., 1956.

[9] Лебедев Н. А., *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Наука, М., 1975.

Поступила в редакцию
16 июля 2025 г.

Olesov A. V.[1] On a theorem for majorizing analytic functions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2026. V. 26. No 1. P. 68–76.

[1] Maritime State University named after admiral G. I. Nevelskoy

ABSTRACT

For functions $\omega(z)$ and $f(z)$ single-valued and analytic on the whole complex plane apart from isolated singular points and such that $f(z) \equiv \overline{f(\overline{z})}$,

$$|\omega(\overline{z})/\omega(z)| < 1 \quad \text{and} \quad |f(z)/\omega(z)| < 1 \quad \text{for} \quad \Im z > 0,$$

differential inequalities at the zeros of the ratio $\overline{\omega(\overline{z})}/\omega(z)$ are obtained with the identification of all cases of equality. The proved inequalities are equivalent to the inequalities of Theorem 3 in [1], in the proof of which an error was made.

Key words: *majorizing analytic functions, univalent functions, inequalities.*