

УДК 517.51
MSC2020 46E30, 46B70

© Д. В. Прохоров¹

Весовое пространство Чезаро как результат вещественной интерполяции весовых пространств Лебега

В данной работе показано, что весовое функциональное пространство Чезаро является результатом вещественной интерполяции пространства Лебега и пространства Лебега со специальным весом, определяемым по весу пространства Чезаро. Получены приложения по интерполяции функциональных пространств Чезаро со степенным весом и интерполяции пространств Чезаро с убывающим показательным весом.

Ключевые слова: функциональное пространство Чезаро, вещественная интерполяция.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202609>

Введение

Пусть $I := (0, \infty)$, $p \in [1, \infty]$, $\mathfrak{M}(I)$ — вещественное векторное пространство всех измеримых по Лебегу функций $f : I \rightarrow [-\infty, \infty]$, $L^0(I)$ — векторное пространство классов эквивалентных по мере Лебега функций из $\mathfrak{M}(I)$, $L^p(I)$ — пространство Лебега. Пусть $w \in \mathfrak{M}(I)$ такая, что $w(x) \in [0, \infty)$ для почти всех $x \in I$. Символом $L_w^p(I)$ обозначим весовое пространство Лебега:

$$L_w^p(I) := \left\{ f \in L^0(I) \mid \|fw\|_{L^p(I)} < \infty \right\};$$

$\text{Ces}_{p,w}(I)$ обозначает пространство Чезаро, $\text{Cop}_{p,w}(I)$ обозначает пространство Копсона:

$$\begin{aligned} \text{Ces}_{p,w}(I) &:= \left\{ f \in L^0(I) \mid \|f\|_{\text{Ces}_{p,w}(I)} := \|wH^\times(|f|)\|_{L^p(I)} < \infty \right\}, \\ \text{Cop}_{p,w}(I) &:= \left\{ f \in L^0(I) \mid \|f\|_{\text{Cop}_{p,w}(I)} := \|wH_\times(|f|)\|_{L^p(I)} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

¹Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65. Электронная почта: prohorov@as.khb.ru

где $H^\times(|f|)(x) := \int_0^x |f(y)| dy$, $H_\times(|f|)(x) := \int_x^\infty |f(y)| dy$ для $f \in L^0(I)$, $x \in I$.

В случае $\chi_{(t,\infty)} w \in L^p(I)$ для любого $t \in I$ пространство $\text{Ces}_{p,w}(I)$ имеет запас элементов (в частности, содержит χ_K для любого компакта $K \subset I$), $\text{Ces}_{p,w}(I)$ полное [1, Лемма 3.1]. Аналогичные результаты при $\chi_{(0,t)} w \in L^p(I)$ для любого $t \in I$ справедливы для пространств Копсона.

Обозначим $\varphi_\beta(x) := \frac{1}{x^\beta}$, $x \in I$, $\beta \in \mathbb{R}$. Пространства $\text{Ces}_{p,\varphi_1}(I)$, $\text{Cop}_{p,\varphi_1}(I)$ (со степенным весом) активно изучались с 1970-х годов (см. [2] и литературу к ней).

По теории интерполяции написан ряд монографий (см., например, [3–5]). Приведем основные определения. Пусть X, Y — два вещественных нормированных пространства. Класс всех линейных непрерывных операторов $T: X \rightarrow Y$ обозначим через $L(X, Y)$. Пара пространств (X, Y) называется интерполяционной парой, если существует хаусдорфово топологическое векторное пространство \mathcal{V} такое, что X непрерывно вложено в \mathcal{V} и Y непрерывно вложено в \mathcal{V} . В этом случае определяются:

$$X + Y := \{z \in \mathcal{V} \mid z = x + y, x \in X, y \in Y\}$$

и пересечение

$$X \cap Y := \{z \in \mathcal{V} \mid z \in X, z \in Y\}$$

с нормами

$$\begin{aligned} \|z\|_{X+Y} &:= \inf_{z=x+y, x \in X, y \in Y} (\|x\|_X + \|y\|_Y), \\ \|z\|_{X \cap Y} &:= \max\{\|z\|_X, \|z\|_Y\}. \end{aligned}$$

Для интерполяционной пары (X, Y) промежуточным пространством называется любое нормированное пространство E такое, что $X \cap Y$ непрерывно вложено в E и E непрерывно вложено в $X + Y$. Интерполяционным пространством между X и Y называют любое промежуточное для (X, Y) пространство E такое, что для $T \in L(X + Y, X + Y)$, у которого $T|_X \in L(X, X)$ и $T|_Y \in L(Y, Y)$, выполнено $T|_E \in L(E, E)$.

Одним из способов построения интерполяционного пространства для интерполяционной пары (X, Y) является K -метод (метод вещественной интерполяции), сформулированный ниже.

K -метод. Пусть (X, Y) — интерполяционная пара. Для $z \in X + Y$ и $t \in (0, \infty)$ положим

$$K(t, z, X, Y) := \inf_{z=x+y, x \in X, y \in Y} (\|x\|_X + t\|y\|_Y).$$

Для $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$ пространство

$$(X, Y)_{\theta, p} := \{z \in X + Y \mid \|z\|_{(X, Y)_{\theta, p}} < \infty\},$$

где

$$\|z\|_{(X, Y)_{\theta, p}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty K(t, z, X, Y)^p t^{-\theta p - 1} dt \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty), \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} t^{-\theta} K(t, z, X, Y), & p = \infty, \end{cases}$$

является интерполяционным пространством между X и Y .

Имеет место следующая теорема.

Теорема. (реитерации) Пусть $p_0, p_1 \in [1, \infty]$, $\theta \in (0, 1)$, $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, (X_0, X_1) – интерполяционная пара банаховых пространств.

- (a) [3, Theorem 2.4, p. 311], [4, Theorem 3.5.3] При $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $p \in [1, \infty]$ выполнено

$$\left((X_0, X_1)_{\theta_0, p_0}, (X_0, X_1)_{\theta_1, p_1} \right)_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{\theta', p},$$

где $\theta' := (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1$.

- (b) [4, Theorems 3.5.4, 5.2.4] Для $\eta \in (0, 1)$ выполнено

$$\left((X_0, X_1)_{\eta, p_0}, (X_0, X_1)_{\eta, p_1} \right)_{\theta, p_\theta} = (X_0, X_1)_{\eta, p_\theta}.$$

Здесь и далее для нормированных пространств $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ запись $X=Y$ означает, что пространства совпадают поэлементно и существуют $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ такие, что $c_1 \|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_Y \leq c_2 \|\cdot\|_X$.

Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $p \in [1, \infty]$, $\theta \in (0, 1)$ и $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. В работе [6] показано (Theorem 2.1(ii)), что $\text{Ces}_{p, \varphi_1}(I) = (L^1(I), L^1_{\varphi_1}(I))_{1-\frac{1}{p}, p}$, и при помощи теоремы реитерации (a) при $1 < p_0 < p_1 < \infty$ доказано (Corollary 2.4) равенство

$$(\text{Ces}_{p_0, \varphi_1}(I), \text{Ces}_{p_1, \varphi_1}(I))_{\theta, p_\theta} = \text{Ces}_{p_\theta, \varphi_1}(I).$$

В [7] без применения теоремы реитерации доказано равенство

$$(\text{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I), \text{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I))_{\theta, p} = \text{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I) \tag{1}$$

для $\beta > \frac{1}{p_0}$. В данной работе показано, что $\text{Ces}_{p, w}(I)$ является результатом вещественной интерполяции $(L^1(I), L^1_u(I))_{\theta, p}$, где $u(t) := \|\chi_{(t, \infty)} w\|_{L^p(I)}^{\frac{1}{\theta}}$, $t \in I$. При помощи теоремы реитерации получен результат (1) работы [7] и при $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ новый результат

$$(\text{Ces}_{p_0, w}(I), \text{Ces}_{p_1, w}(I))_{\theta, p_\theta} = \text{Ces}_{p_\theta, w}(I), \tag{2}$$

где $w(t) := e^{-ct}$, $c > 0$, $t \in I$.

В разделе 1.2 приведены некоторые аналогичные результаты для пространств Копсона.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \leq cB$ с константой c , зависящей от параметров перечисленных в $\{\dots\}$; $A \approx B$ равносильно $(A \lesssim B \text{ и } B \lesssim A)$ в $\{\dots\}$.

1. Результаты для пространств Чезаро

Теорема 1. Пусть $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, $\chi_{(x, \infty)} w \in L^p(I)$ для любого $x \in I$. Тогда

$$(L^1(I), L_u^1(I))_{\theta, p} = \text{Ces}_{p, w}(I), \quad (3)$$

где $u(t) := \|\chi_{(t, \infty)} w\|_{L^p(I)}^{\frac{1}{\theta}}$, $t \in I$.

Доказательство. Для $y \in (0, \infty)$ имеет место равенство (см. [8, Proposition 3.1.17])

$$K(y, f, L^1(I), L_u^1(I)) = \int_0^\infty |f(s)| \min(1, yu(s)) ds.$$

Подставляя в это равенство $y = \frac{1}{u(t)}$, $t \in I$, получим

$$K\left(\frac{1}{u(t)}, f, L^1(I), L_u^1(I)\right) = \int_0^\infty |f(s)| \min\left(1, \frac{u(s)}{u(t)}\right) ds = \int_0^t |f| + \frac{1}{u(t)} \int_t^\infty |f| u. \quad (4)$$

Для $y \in (0, \frac{1}{u(0+)})$ и $s \in I$ выполнено $0 < yu(s) \leq \frac{u(s)}{u(0+)} \leq 1$. Поэтому

$$K(y, f, L^1(I), L_u^1(I)) = y \int_0^\infty |f| u. \quad (5)$$

1. Случай $p < \infty$. Заметим, что для почти всех $t \in I$ выполнено

$$u(t)^{\theta p + 1} \left(\frac{1}{u}\right)'(t) = \left(\int_t^\infty w^p\right)^{\frac{\theta p + 1}{\theta p}} \frac{1}{\theta p} \left(\int_t^\infty w^p\right)^{-\frac{1}{\theta p} - 1} w(t)^p = \frac{1}{\theta p} w(t)^p. \quad (6)$$

Используя (4), (5) и (6), запишем норму элемента пространства $(L^1(I), L_u^1(I))_{\theta, p}$

$$\begin{aligned} \|f\|_{(L^1(I), L_u^1(I))_{\theta, p}} &= \left[\int_0^\infty K(y, f, L^1(I), L_u^1(I))^p y^{-\theta p - 1} dy \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left[\int_0^{\frac{1}{u(0+)}} K(y, f, L^1(I), L_u^1(I))^p y^{-\theta p - 1} dy + \int_0^\infty K\left[\frac{1}{u(t)}, f, L^1(I), L_u^1(I)\right]^p u(t)^{\theta p + 1} \left[\frac{1}{u}\right]'(t) dt \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left[\int_0^{\frac{1}{u(0+)}} y^{(1-\theta)p-1} dy \left(\int_0^\infty |f| u\right)^p + \int_0^\infty \left(\int_0^t |f| + \frac{1}{u(t)} \int_t^\infty |f| u\right)^p \frac{1}{\theta p} w(t)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left[\frac{1}{(1-\theta)p} \left(u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty |f| u\right)^p + \frac{1}{\theta p} \int_0^\infty \left(w(t) \int_0^t |f| + \frac{w(t)}{u(t)} \int_t^\infty |f| u\right)^p dt \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (7) \end{aligned}$$

Откуда, в частности,

$$\|f\|_{(L^1(I), L^1_u(I))_{\theta, p}} \geq \left[\frac{1}{\theta p} \int_0^\infty \left(w(t) \int_0^t |f| \right)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = (\theta p)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{\text{Ces}_{p, w}(I)},$$

то есть доказано непрерывное вложение $(L^1(I), L^1_u(I))_{\theta, p} \subset \text{Ces}_{p, w}(I)$.

В силу равенства (7) для доказательства обратного вложения достаточно показать справедливость неравенств

$$\left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty |f|u \right)^p \frac{w(t)^p}{u(t)^p} dt \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{p, \theta} \|f\|_{\text{Ces}_{p, w}(I)},$$

$$u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty |f|u \lesssim_{p, \theta} \|f\|_{\text{Ces}_{p, w}(I)} \quad (\text{при } u(0+) \neq \infty),$$

в левых частях которых присутствует интеграл ($t \in [0, \infty)$)

$$\int_t^\infty |f|u = \int_t^\infty |f(s)| \left[\int_s^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - 1} \int_s^\infty w^p = \int_t^\infty w(x)^p \int_t^x |f(s)| \left[\int_s^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - 1} ds dx. \quad (8)$$

Оценка интеграла (8) зависит от соотношения произведения θp и 1.

При $\theta p \geq 1$ имеем

$$\int_t^\infty |f|u \leq \int_t^\infty w(x)^p \left[\int_x^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - 1} \left[\int_0^x |f| \right] dx. \quad (9)$$

Откуда

$$\left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty |f|u \right)^p \frac{w(t)^p}{u(t)^p} dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \left[\int_x^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - 1} w(x)^{p-1} \left[w(x) \int_0^x |f| \right] dx \right)^p w(t)^p \left[\int_t^\infty w^p \right]^{-\frac{1}{\theta}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{p, \theta} \|f\|_{\text{Ces}_{p, w}(I)}$$

в силу неравенства Харди [9]

$$\left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \left[\int_x^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - 1} w(x)^{p-1} |g(x)| dx \right)^p w(t)^p \left[\int_t^\infty w^p \right]^{-\frac{1}{\theta}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{p, \theta} \left(\int_0^\infty |g|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ибо для любого $s \in I$ выполнено

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^s w(t)^p \left[\int_t^\infty w^p \right]^{-\frac{1}{\theta}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_s^\infty \left[\int_x^\infty w^p \right] w(x)^p dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & \approx_{p,\theta} \left(\left[\int_s^\infty w^p \right]^{1-\frac{1}{\theta}} - \left[\int_0^\infty w^p \right]^{1-\frac{1}{\theta}} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_s^\infty w^p \right]^{\frac{(p'-p'+1)}{p'}} \leq \left[\int_s^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p} + \frac{\theta-1}{\theta p}} = 1. \end{aligned}$$

Кроме того, применяя (9) и неравенство Гёльдера, в случае $u(0+) \neq \infty$ получим оценку

$$\begin{aligned} & u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty |f|u \leq u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty w(x)^p \left[\int_x^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - 1} \left[\int_0^x |f| \right] dx \leq \\ & \leq u(0+)^{\theta-1} \left[\int_0^\infty w(x)^p \left[\int_x^\infty w^p \right]^{\frac{p'}{\theta p} - p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{\text{Ces}_{p,w}(I)} \approx_{p,\theta} \|f\|_{\text{Ces}_{p,w}(I)}. \end{aligned}$$

При $\theta p < 1$ оценка (8) имеет вид

$$\int_t^\infty |f|u \leq \left[\int_t^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p} - 1} \int_t^\infty w(x)^p \left[\int_0^x |f| \right] dx. \quad (10)$$

Откуда при $p > 1$

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty |f|u \right)^p \frac{w(t)^p}{u(t)^p} dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty w(x)^{p-1} \left[w(x) \int_0^x |f| \right] dx \right)^p w(t)^p \left[\int_t^\infty w^p \right]^{-p} dt \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_p \|f\|_{\text{Ces}_{p,w}(I)} \end{aligned}$$

в силу неравенства Харди [9]

$$\left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty w(x)^{p-1} |g(x)| dx \right)^p w(t)^p \left[\int_t^\infty w^p \right]^{-p} dt \right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_p \left(\int_0^\infty |g|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ибо для любого $s \in I$ выполнено

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^s w(t)^p \left[\int_t^\infty w^p \right]^{-p} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_s^\infty w^p \right]^{\frac{1}{p'}} = (p-1)^{-\frac{1}{p}} \left(\left[\int_s^\infty w^p \right]^{1-p} - \left[\int_0^\infty w^p \right]^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_s^\infty w^p \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & \leq (p-1)^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

При $p=1$ из (8) следует оценка

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty |f|u \right)^p \frac{w(t)^p}{u(t)^p} dt \right]^{\frac{1}{p}} = \int_0^\infty \left(\int_t^\infty w(x) \int_t^x |f(s)| \left(\int_s^\infty w \right)^{\frac{1}{\theta}-1} ds dx \right) \frac{w(t)}{u(t)} dt = \\ & = \int_0^\infty w(x) \int_0^x \frac{w(t)}{u(t)} \int_t^x |f(s)| \left(\int_s^\infty w \right)^{\frac{1}{\theta}-1} ds dt dx = \\ & = \int_0^\infty w(x) \int_0^x |f(s)| \left(\int_s^\infty w \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \int_0^s w(t) \left(\int_t^\infty w \right)^{-\frac{1}{\theta}} dt ds dx = \\ & = \frac{\theta}{1-\theta} \int_0^\infty w(x) \int_0^x |f(s)| \left(\int_s^\infty w \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \left[\left(\int_s^\infty w \right)^{1-\frac{1}{\theta}} - \left(\int_0^\infty w \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \right] ds dx \leq \frac{\theta}{1-\theta} \|f\|_{\text{Ces}_{1,w}(I)}. \end{aligned}$$

Кроме того, применяя (10) и неравенство Гёльдера, в случае $u(0+) \neq \infty$ получим оценку

$$\begin{aligned} u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty |f|u & \leq u(0+)^{\theta-1} \left[\int_0^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p}-1} \int_0^\infty w(x)^p \left[\int_0^x |f| \right] dx \\ & \leq u(0+)^{\theta-1} \left[\int_0^\infty w^p \right]^{\frac{1}{\theta p}-1+\frac{1}{p}} \|f\|_{\text{Ces}_{p,w}(I)} = \|f\|_{\text{Ces}_{p,w}(I)}. \end{aligned}$$

Таким образом, (3) доказано при $p < \infty$.

2. Случай $p = \infty$. Используя (4) и (5), запишем норму элемента пространства $(L^1(I), L_u^1(I))_{\theta, \infty}$

$$\begin{aligned} & \|f\|_{(L^1(I), L_u^1(I))_{\theta, \infty}} = \text{ess sup}_{y \in (0, \infty)} y^{-\theta} K(y, f, L^1(I), L_u^1(I)) = \\ & = \max \left\{ \text{ess sup}_{y \in (0, \frac{1}{u(0+)}} y^{-\theta} K(y, f, L^1(I), L_u^1(I)), \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} u(t)^\theta K \left[\frac{1}{u(t)}, f, L^1(I), L_u^1(I) \right] \right\} = \\ & = \max \left\{ u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty |f|u, \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} u(t)^\theta \left(\int_0^t |f| + \frac{1}{u(t)} \int_t^\infty |f|u \right) \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Для $f \in (L^1(I), L_u^1(I))_{\theta, \infty}$ в силу равенства (11) выполняется условие

$$\int_0^t |f| < \infty \text{ для любого } t \in I. \quad (12)$$

Из определения $\text{Ces}_{p,w}(I)$ для $f \in \text{Ces}_{p,w}(I)$ также следует (12). Поэтому далее предполагаем $\int_0^\infty |f| \neq 0$ и выполнение (12).

Определим $N := \sup \left\{ k \in \mathbb{Z} \mid 2^k < \int_0^\infty |f| \right\}$ и при $k < N$ точку $a_k \in I$ равенством $\int_0^{a_k} |f| = 2^k$. Кроме того, положим $a_N := \infty$ при $N < \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} u(t)^\theta \int_0^t |f| &= \sup_{k < N} \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a_k, a_{k+1}]} u(t)^\theta \int_0^t |f| \approx \sup_{k < N} 2^k u(a_k)^\theta = \sup_{k < N} 2^k \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a_k, \infty)} w(t) = \\ &= \sup_{k < N} 2^k \sup_{k \leq j < N} \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a_j, a_{j+1}]} w(t) = \sup_{j < N} \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a_j, a_{j+1}]} w(t) \sup_{k \leq j} 2^k \approx \sup_{j < N} \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a_j, a_{j+1}]} w(t) \int_0^t |f| = \\ &= \|f\|_{\operatorname{Ces}_{\infty, w}(I)}. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая равенство (11), вытекает оценка $\|f\|_{(L^1(I), L^1_u(I))_{\theta, \infty}} \gtrsim \|f\|_{\operatorname{Ces}_{\infty, w}(I)}$.

В силу (11) для доказательства обратного неравенства достаточно показать справедливость неравенств

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} u(t)^{\theta-1} \int_t^\infty |f| u &\lesssim_\theta \|f\|_{\operatorname{Ces}_{\infty, w}(I)}, \\ u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty |f| u &\lesssim_\theta \|f\|_{\operatorname{Ces}_{\infty, w}(I)} \quad (\text{при } u(0+) \neq \infty). \end{aligned}$$

Для $k \in \mathbb{Z}$ определим $E_k := \{x \in I \mid u(x) \in [2^k, 2^{k+1})\}$. Применяя дискретизацию и [10, Proposition 2.1], получим

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} u(t)^{\theta-1} \int_t^\infty |f| u &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{ess\,sup}_{t \in E_k} u(t)^{\theta-1} \int_t^\infty |f| u \approx \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\theta-1)} \int_{\inf E_k}^\infty |f| u = \\ &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\theta-1)} \sum_{j \leq k} \int_{E_j} |f| u \approx \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\theta-1)} \int_{E_k} |f| u \approx \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\theta} \int_{E_k} |f| \lesssim_\theta \\ &\lesssim_\theta \sup_{k \in \mathbb{Z}} u(\sup E_k -)^\theta \int_0^{\sup E_k} |f| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{t \rightarrow \sup E_k -} u(t)^\theta \int_0^t |f| \leq \sup_{t \in (0, \infty)} u(t)^\theta \int_0^t |f| = \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} u(t)^\theta \int_0^t |f| \approx \|f\|_{\operatorname{Ces}_{\infty, w}(I)}. \end{aligned}$$

В случае $u(0+) \neq \infty$

$$u(0+)^{\theta-1} \int_0^\infty |f| u = \lim_{t \rightarrow 0+} u(t)^{\theta-1} \int_t^\infty |f| u \leq \sup_{t \in (0, \infty)} u(t)^{\theta-1} \int_t^\infty |f| u = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} u(t)^{\theta-1} \int_t^\infty |f| u.$$

Таким образом, случай $p = \infty$ доказан. \square

Пусть $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, $\theta_0, \theta_1 \in (0, 1)$, $\frac{1}{\gamma} := \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$. Предположим, существует вес u такой, что

$$\text{Ces}_{p_0, w}(I) = (L^1(I), L^1_{a_0 u}(I))_{\theta_0, p_0}, \quad \text{Ces}_{p_1, w}(I) = (L^1(I), L^1_{a_1 u}(I))_{\theta_1, p_1}.$$

Тогда $\left(\int_t^\infty w^{p_0}\right)^{\frac{1}{\theta_0 p_0}} = a_0 u(t)$ и $\left(\int_t^\infty w^{p_1}\right)^{\frac{1}{\theta_1 p_1}} = a_1 u(t)$ для $t \in I$. Следовательно, для почти всех $t \in I$, $i \in \{0, 1\}$ выполнено

$$-w(t)^{p_i} = a_i^{\theta_i p_i} \theta_i p_i u(t)^{\theta_i p_i - 1} u'(t) \Rightarrow w(t) = a_i^{\theta_i} u(t)^{\theta_i - \frac{1}{p_i}} |u'(t)|^{\frac{1}{p_i}}.$$

Откуда для почти всех $t \in I$

$$a_0^{\theta_0} u(t)^{\theta_0 - \frac{1}{p_0}} |u'(t)|^{\frac{1}{p_0}} = a_1^{\theta_1} u(t)^{\theta_1 - \frac{1}{p_1}} |u'(t)|^{\frac{1}{p_1}} \Rightarrow u(t)^{\theta_1 - \theta_0 + \frac{1}{\gamma}} = \frac{a_0^{\theta_0}}{a_1^{\theta_1}} |u'(t)|^{\frac{1}{\gamma}}$$

и

$$u(t)^{(\theta_1 - \theta_0)\gamma + 1} = - \left[\frac{a_0^{\theta_0}}{a_1^{\theta_1}} \right]^\gamma u'(t).$$

При $\theta_0 \neq \theta_1$ решением дифференциального уравнения является степенная функция

$$u(t) = c t^{\frac{1}{(\theta_0 - \theta_1)\gamma}}, \quad t \in (0, \infty).$$

Так как u не возрастает, то $(\theta_0 - \theta_1)\gamma < 0$. Из равенства (6) вытекает, что w — степенная функция.

При $\theta_0 = \theta_1 =: \theta$ решением дифференциального уравнения является функция $u(t) = e^{-ct}$, $t \in I$, где $c = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\theta\gamma}$. Применяя (6), получим, что $w = e^{-\tilde{c}t}$, $t \in I$.

Следствие 1. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $\beta > \frac{1}{p_0}$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Тогда выполнено (1).

Доказательство. При $w = \varphi_\beta$ и $\theta_i := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p_i \beta}\right)$, $i \in \{0, 1\}$, в силу теоремы 1 получим

$$u(t) = \|\chi_{(t, \infty)} \varphi_\beta\|_{L^{p_i}(I)}^{\frac{1}{\theta_i}} = c_1(p_i, \beta) \varphi_{2\beta}(t), \quad t \in I$$

и

$$(L^1(I), L^1_{\varphi_{2\beta}}(I))_{\theta_i, p_i} = (L^1(I), L^1_{c_1 \varphi_{2\beta}}(I))_{\theta_i, p_i} = \text{Ces}_{p_i, \varphi_\beta}(I).$$

Так как $\theta_0 < \theta_1$, по теореме реитерации (a)

$$\begin{aligned} (\text{Ces}_{p_0, \varphi_\beta}(I), \text{Ces}_{p_1, \varphi_\beta}(I))_{\theta, p} &= ((L^1(I), L^1_{\varphi_{2\beta}}(I))_{\theta_0, p_0}, (L^1(I), L^1_{\varphi_{2\beta}}(I))_{\theta_1, p_1})_{\theta, p} = \\ &= (L^1(I), L^1_{\varphi_{2\beta}}(I))_{\theta', p}, \end{aligned}$$

где

$$\theta' = (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{p_\theta \beta} \right].$$

В силу теоремы 1 (при $w = \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}$ и $\theta = \theta'$) для $t \in I$ получим

$$u(t) = \left\| \chi_{(t, \infty)} \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}} \right\|_{L^p(I)}^{\frac{1}{\theta'}} = c_2(p, \beta, p\theta) t^{(\frac{1}{p\theta} - \beta) \frac{1}{\theta'}} = c_2 \varphi_{2\beta}(t)$$

и

$$(L^1(I), L^1_{\varphi_{2\beta}}(I))_{\theta', p} = (L^1(I), L^1_{c_2 \varphi_{2\beta}}(I))_{\theta', p} = \text{Ces}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\theta}}}(I).$$

□

Следствие 2. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $\theta \in (0, 1)$, $c > 0$, $w(t) = e^{-ct}$, $t \in I$. Тогда выполнено (2).

Доказательство. По теореме 1 (при $\theta = \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} (L^1(I), L^1_{w^2})_{\frac{1}{2}, p_0} &= (L^1(I), L^1_{c_0 w^2})_{\frac{1}{2}, p_0} = \text{Ces}_{p_0, w}(I), \\ (L^1(I), L^1_{w^2})_{\frac{1}{2}, p_1} &= (L^1(I), L^1_{c_1 w^2})_{\frac{1}{2}, p_1} = \text{Ces}_{p_1, w}(I). \end{aligned}$$

где $c_0 := (cp_0)^{-\frac{2}{p_0}}$, $c_1 := (cp_1)^{-\frac{2}{p_1}}$ при $p_1 < \infty$, $c_1 := 1$ при $p_1 = \infty$. По теореме реитерации (b) и теореме 1

$$\begin{aligned} (\text{Ces}_{p_0, w}(I), \text{Ces}_{p_1, w}(I))_{\theta, p_\theta} &= ((L^1(I), L^1_{w^2}(I))_{\frac{1}{2}, p_0}, (L^1(I), L^1_{w^2}(I))_{\frac{1}{2}, p_1})_{\theta, p_\theta} = \\ &= (L^1(I), L^1_{w^2}(I))_{\frac{1}{2}, p_\theta} = \text{Ces}_{p_\theta, w}(I). \end{aligned}$$

□

2. Результаты для пространств Копсона

Теорема 2. Пусть $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, $\chi_{(0, x)} w \in L^p(I)$ для любого $x \in I$. Тогда

$$(L^1(I), L^1_{\tilde{u}}(I))_{\theta, p} = \text{Cop}_{p, w}(I),$$

где $\tilde{u}(t) := \|\chi_{(0, t)} w\|_{L^p(I)}^{\frac{1}{\theta}}$, $t \in I$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Заметим только, что для указанной функции \tilde{u} выполнено

$$K \left(\frac{1}{\tilde{u}(t)}, f, L^1(I), L^1_{\tilde{u}}(I) \right) = \int_0^\infty |f(s)| \min \left(1, \frac{\tilde{u}(s)}{\tilde{u}(t)} \right) ds = \frac{1}{\tilde{u}(t)} \int_0^t |f| \tilde{u} + \int_t^\infty |f|, \quad t \in I,$$

и при $p < \infty$

$$\begin{aligned} &\|f\|_{(L^1(I), L^1_{\tilde{u}}(I))_{\theta, p}} = \\ &= \left[\frac{1}{(1-\theta)^p} \left(\tilde{u}(\infty)^{\theta-1} \int_0^\infty |f| \tilde{u} \right)^p + \frac{1}{\theta^p} \int_0^\infty \left(\frac{w(t)}{\tilde{u}(t)} \int_0^t |f| \tilde{u} + w(t) \int_t^\infty |f| \right)^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

при $p = \infty$

$$\|f\|_{(L^1(I), L^1_{\tilde{u}}(I))_{\theta, p}} = \max \left\{ \tilde{u}(\infty)^{\theta-1} \int_0^\infty |f| \tilde{u}, \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} \tilde{u}(t)^\theta \left(\frac{1}{\tilde{u}(t)} \int_0^t |f| \tilde{u} + \int_t^\infty |f| \right) \right\}.$$

Следствие 3. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $\beta < \frac{1}{p_1}$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Тогда выполнено

$$\left(\operatorname{Cop}_{p_0, \varphi_\beta}(I), \operatorname{Cop}_{p_1, \varphi_\beta}(I) \right)_{\theta, p} = \operatorname{Cop}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I).$$

Доказательство. При $\beta < \frac{1}{p_1}$, $w = \varphi_\beta$ и $\theta_i := \frac{1}{|\beta|+2} \left[\frac{1}{p_i} - \beta \right] = \frac{1-p_i\beta}{(|\beta|+2)p_i}$, $i \in \{0, 1\}$, в силу теоремы 2 для $t \in I$ имеем

$$\tilde{u}(t) = \|\chi_{(0,t)} \varphi_\beta\|_{L^{p_i}(I)}^{\frac{1}{\theta_i}} = c_1(p_i, \beta) t^{(\frac{1}{p_i} - \beta) \frac{1}{\theta_i}} = c_1(p_i, \beta) \varphi_{-|\beta|-2}(t), \quad t \in I,$$

и

$$(L^1(I), L^1_{\varphi_{-|\beta|-2}}(I))_{\theta_i, p_i} = (L^1(I), L^1_{c_1 \varphi_{-|\beta|-2}}(I))_{\theta_i, p_i} = \operatorname{Cop}_{p_i, \varphi_\beta}(I).$$

Так как $\theta_0 > \theta_1$, по теореме реитерации (a)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Cop}_{p_0, \varphi_\beta}(I), \operatorname{Cop}_{p_1, \varphi_\beta}(I))_{\theta, p} = (\operatorname{Cop}_{p_1, \varphi_\beta}(I), \operatorname{Cop}_{p_0, \varphi_\beta}(I))_{1-\theta, p} = \\ & = \left((L^1(I), L^1_{\varphi_{-|\beta|-2}}(I))_{\theta_1, p_1}, (L^1(I), L^1_{\varphi_{-|\beta|-2}}(I))_{\theta_0, p_0} \right)_{1-\theta, p} = (L^1(I), L^1_{\varphi_{-|\beta|-2}}(I))_{\theta', p}, \end{aligned}$$

где

$$\theta' = \theta\theta_1 + (1-\theta)\theta_0 = \frac{1}{|\beta|+2} \left[\theta \left(\frac{1}{p_1} - \beta \right) + (1-\theta) \left(\frac{1}{p_0} - \beta \right) \right] = \frac{1}{|\beta|+2} \left[\frac{1}{p_\theta} - \beta \right].$$

В силу теоремы 2 (при $w = \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}$ и $\theta = \theta'$) для $t \in I$ получим

$$\tilde{u}(t) = \left\| \chi_{(0,t)} \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}} \right\|_{L^p(I)}^{\frac{1}{\theta'}} = c_2(p, \beta, p_\theta) t^{(\frac{1}{p_\theta} - \beta) \frac{1}{\theta'}} = c_2 \varphi_{-|\beta|-2}(t), \quad t \in I$$

и

$$(L^1(I), L^1_{\varphi_{-|\beta|-2}}(I))_{\theta', p} = (L^1(I), L^1_{c_2 \varphi_{-|\beta|-2}}(I))_{\theta', p} = \operatorname{Cop}_{p, \varphi_{\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}}}(I).$$

□

Список литературы

- [1] Kaminska A., Kubiak D., “On the dual of Cesàro function space”, *Nonlinear Anal.*, **75**, (2012), 2760–2773.
- [2] Astashkin S. V., Maligranda L., “Structure of Cesàro function spaces: a survey”, *Function Spaces X (H. Hudzik et al., eds.)*, Proc. Int. Conf., Poznan 2012, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warszawa,; Banach Center Publications 102, 2014, 13–40.
- [3] Bennett C., Sharpley R., *Interpolation of operators*, Academic Press, Inc., Boston, MA etc., 1988.

- [4] Bergh J., Löfström J., *Interpolation spaces. An introduction.*, Springer, Berlin, 1976.
- [5] Lunardi A., *Interpolation theory*, Publications of the Scuola Normale Superiore 3rd ed., 2018.
- [6] Astashkin S.V., Maligranda L., “Interpolation of Cesàro sequence and function spaces”, *Studia Math.*, **215**, (2013), 39–69.
- [7] Прохоров Д. В., “Об интерполяции функциональных пространств Чезаро со степенным весом”, *Сиб. матем. журн.*, **66**:2, (2025), 233–244.
- [8] Brudnyĭ Yu. A., Krugljak N. Ya., *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [9] Muckenhoupt B., “Hardy’s inequalities with weights”, *Studia Math.*, **44**:1, (1972), 31–38.
- [10] Gol’dman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D., “On the principle of duality in Lorentz spaces”, *Can. J. Math.*, **48**:5, (1996), 959–979.

Поступила в редакцию
20 ноября 2025 г.

*Prokhorov D. V.*¹ Weighted Cesàro space as a result of real interpolation. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2026. V. 26. No 1. P. 77–88.

¹Computing Center, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Russia

ABSTRACT

It is shown that a weighted Cesàro function space is the result of a real interpolation of a Lebesgue space and a Lebesgue space with a special weight determined by the weight of the Cesàro space. Applications to interpolation of Cesàro spaces with power-law weight and interpolation of Cesàro spaces with decreasing exponential weight are given.

Key words: *Cesàro function space, real interpolation.*