

УДК 517.958

MSC2020 35Q20 +35Q60

© И. В. Прохоров¹, Д. В. Шкуратова²

Методы экстраполяционного уточнения томограмм с адаптивной фокусировкой рентгеновского излучения

Задача томографии микрообъектов, сравнимых с шириной рентгеновского пучка, сведена к асимптотическому обращению обобщенного преобразования Радона коэффициента поглощения излучения по вертикальным секторам с небольшим углом раствора. Разработан численный алгоритм, основанный на экстраполяции нескольких томографических изображений, полученных в результате обращения преобразования Радона по секторам с варьируемыми углами раствора, определяемыми предварительно заданным фокусным расстоянием. Регулировка степени фокусировки, дополненная экстраполяционным уточнением, обеспечивает значительное улучшение качества изображений, особенно в центральной части области и при реконструкции гладких функций.

Ключевые слова: микрофокусная томография, преобразование Радона, экстраполяция, фантом Дерензо

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202610>

Введение

Обширный класс обратных задач для уравнений математической физики сводится к задаче обращения преобразования Радона [1–4], которая является частным случаем общей задачи интегральной геометрии. Задачи интегральной геометрии весьма разнообразны и различаются как областями интегрирования искомым функций, так и используемыми весовыми коэффициентами. К настоящему времени накоплен богатый опыт решения задач интегральной геометрии [5–9].

Применительно к микрофокусной рентгеновской томографии в нашей работе рассматривается задача интегральной геометрии, заключающаяся в нахождении функции по заданным интегралам вдоль вертикальных секторов с изменяемым углом раствора. На практике варьирования углов раствора можно достичь, например, путем изменения фокусного расстояния от объекта до источника и детектора.

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

² Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: prokhorov@iam.dvo.ru (И. В. Прохоров).

Настоящая статья продолжает серию работ [10–15], посвященных применению экстраполяционных методов для решения задач рентгеновской и акустической томографии. Предложены экстраполяционные алгоритмы второго и четвертого порядков точности относительно малого параметра, характеризующего угол раствора сектора. Для демонстрации работоспособности и установления области применения разработанных алгоритмов проведены вычислительные эксперименты.

1. Постановка задачи. Математическая модель микрофокусной томографии

В работе рассматривается интегральное преобразование функции $f(r)$, заданной в единичном круге $G = \{r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |r| < 1\}$, следующего вида:

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\varphi - \varepsilon}^{\varphi + \varepsilon} \int_{\omega \cdot \omega_{\perp} - \sqrt{(\omega \cdot \omega_{\perp})^2 + 1 - \rho^2}}^{\omega \cdot \omega_{\perp} + \sqrt{(\omega \cdot \omega_{\perp})^2 + 1 - \rho^2}} f(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi')) d\tau d\varphi', \quad (1)$$

где $\omega(\varphi') = (-\sin \varphi', \cos \varphi')$, $\omega_{\perp}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\omega(\varphi') \cdot \omega_{\perp}(\varphi) = \sin(\varphi' - \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [-1, 1]$ и $\varphi' \in [\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Интегральное преобразование (1) является обобщением классического преобразования Радона

$$(R_0f)(\rho, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi)) d\tau, \quad (2)$$

которое представляет собой двумерное семейство интегралов от функции f вдоль всевозможных прямых, проходящих через область G . Задача заключается в приближенном нахождении функции f , если задана функция

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = g(\rho, \varphi, \varepsilon) \quad (3)$$

на некотором конечном наборе значений параметра ε .

В модели микрофокусной томографии функция f имеет смысл коэффициента поглощения излучения. Дополнительное интегрирование в правой части соотношения (1) учитывает физические размеры детекторов и облучающей трубки, а также расхождение рентгеновских лучей при фокусировке их в точки, лежащие на диаметре круга $\{r = \rho\omega_{\perp}, -1 \leq \rho \leq 1\}$, перпендикулярно вектору ω .

Например, если при фиксированных ρ и φ центры источника и детектора шириной $2l_2$ находятся в точках $\rho\omega_{\perp}(\varphi) - l_1\omega(\varphi)$ и $\rho\omega_{\perp}(\varphi) + l_1\omega(\varphi)$ соответственно, то

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \left(\frac{l_2}{l_1} \right),$$

где $l_1 \geq 1$ — фокусное расстояние. Сканирование объекта происходит путем варьирования переменных $\rho \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, \pi]$. Уменьшение угла раствора ε может быть достигнуто путем увеличения фокусного расстояния l_1 (см. рис. 1).

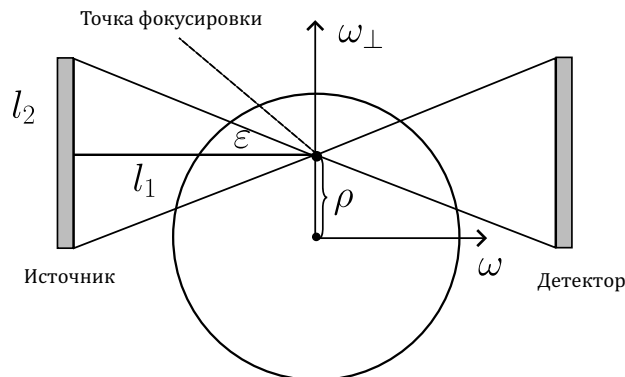


Рис. 1. Схема сканирования в микрофокусной томографии.

Так как рассматривается случай, когда параметр ε относительно небольшой, то при асимптотической малости параметра ε можно применить традиционные методы обращения преобразования Радона, дополненные экстраполяционным уточнением решения по известным наборам функций $(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon)$, заданным для различных значений параметра $\varepsilon = \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots$. В работе будут представлены результаты исследований для экстраполяционных алгоритмов по двум и трем наборам исходных данных.

2. Асимптотические разложения решения задачи томографии. Экстраполяционные формулы

Для удобства продолжим функцию f нулем вне области G , тогда интегральные преобразования (1), (2) можно переписать в виде

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi')) d\tau d\varphi', \quad (4)$$

$$(R_0f)(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi)) d\tau.$$

Предположим, что для подынтегральной функции $f(\rho\omega_{\perp}(\varphi') + \tau\omega(\varphi'))$ в соотношении (4) справедливо асимптотическое разложение в достаточно малой окрестности точки $\varphi' = \varphi$:

$$f(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi')) = f_0(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi)) + f_1(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))(\varphi' - \varphi) + f_2(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))(\varphi' - \varphi)^2 + f_3(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))(\varphi' - \varphi)^3 + f_4(\rho\omega_{\perp}(\varphi) + \tau\omega(\varphi))(\varphi' - \varphi)^4. \quad (5)$$

Подставляя разложение (5) в (4) и принимая во внимание, что при любом $i = 0, \dots, 4$ справедливо $(Rf_i)(\rho, \varphi, \varepsilon) = (R_0f_i)(\rho, \varphi)$, получим

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = (R_0f_0)(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon^2}{3}(R_0f_2)(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon^4}{5}(R_0f_4)(\rho, \varphi). \quad (6)$$

Когда функция $g(\rho, \varphi, \varepsilon)$ в уравнении (3) известна для трех значений ε , тогда из (6) получаем

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon_i) = g(\rho, \varphi, \varepsilon_i) = (R_0f_0)(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon_i^2}{3}(R_0f_2)(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon_i^4}{5}(R_0f_4)(\rho, \varphi). \quad (7)$$

Учитывая соотношения (7), перепишем полином (6) в форме Лагранжа

$$(Rf)(\rho, \varphi, \varepsilon) = g(\rho, \varphi, \varepsilon_1) \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_3^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2} + g(\rho, \varphi, \varepsilon_2) \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_3^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2} + g(\rho, \varphi, \varepsilon_3) \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2}. \quad (8)$$

При $\varepsilon = 0$ из (8) находим

$$(Rf)(\rho, \varphi, 0) = (R_0f_0)(\rho, \varphi) = g(\rho, \varphi, \varepsilon_1) \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2} + g(\rho, \varphi, \varepsilon_2) \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} \frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2} + g(\rho, \varphi, \varepsilon_3) \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2} \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2}. \quad (9)$$

Применяя к обеим частям (9) обратное преобразование Радона R_0^{-1} , получаем

$$f(r) = (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_1) \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2} + (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_2) \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} \frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2} + (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_3) \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2} \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2}. \quad (10)$$

Для получения формулы второго порядка малости по параметру ε достаточно всего двух значений $g(\rho, \varphi, \varepsilon_1)$ и $g(\rho, \varphi, \varepsilon_2)$:

$$f(r) = (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_1) \frac{-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} + (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_2) \frac{-\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}, \quad (11)$$

а для получения формулы нулевого порядка – всего одного значения:

$$f(r) = (R_0^{-1}g)(r, \varepsilon_1). \quad (12)$$

Фактически при использовании соотношения (12) восстановление функции f проводится с помощью обращения классического преобразования Радона R_0^{-1} по заданной функции $g(\rho, \varphi, \varepsilon_1)$ без экстраполяционного уточнения.

3. Результаты тестирования экстраполяционных алгоритмов

Для обращения преобразования Радона (2) мы воспользовались алгоритмом свертки и обратной проекции [1, 2], который заключается в последовательном применении двух операций. На первом шаге выполняется свертка проекций $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon)$, $-1 \leq \rho_i \leq 1$, $i = -N_\rho, \dots, N_\rho$

$$v_{j,k} = \frac{1}{N_\rho} \sum_{i=-N_\rho}^{N_\rho} w_b(s_k - s_i)(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon)$$

с некоторой достаточно произвольной фильтрующей функцией $w_b(s)$. В качестве функции $w_b(s)$ нами выбрано одно из наиболее популярных в цифровой обработке сигналов ядро Шепша – Логана, сочетающее в себе вычислительную эффективность и простоту реализации [1]. На втором шаге вычисляется дискретная обратная проекция

$$\hat{f}(x, y, \varepsilon) = \frac{2\pi}{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_\varphi} \left((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1} \right),$$

где N_φ – количество разбиений отрезка $[0, \pi]$ по переменной φ . Ошибка между точным решением f и приближенным \hat{f} обусловлена как погрешностью дискретизации, так и использованием обобщенных проекций $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon)$, вычисляемых по формуле (1), вместо проекций $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, 0)$, определенных соотношением (2).

В расчетах при сравнении точного решения f и приближенного решения \hat{f} будем использовать относительное среднеквадратичное отклонение δ . Для осуществления экстраполяционного уточнения функции $\hat{f}(x, y, \varepsilon)$ нам нужно несколько раз провести обращение преобразования Радона при разных ε , для того чтобы воспользоваться формулами (10)–(12). При вычислении функции $\hat{f}(x, y, \varepsilon)$ с помощью алгоритма свертки и обратной проекции использовались параметры разбиения для преобразования Радона $N_\rho = 200$ и $N_\varphi = 600$ с близким к оптимальному соотношению $N_\varphi/N_\rho = \pi$ [1].

В численных экспериментах роль тестовой функции f выполнял фантом Дерензо [16], предназначенный для оценки разрешающей способности томографических алгоритмов. Графическое изображение этого фантома приведено на рис. 2а. Фоновое значение функции f равно нулю, а в круговых включениях функция принимает значения, равные 1. На рис. 2б приведена реконструкция фантома по данным $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 = 2^0$, определенным на сетке $(\rho_i, \varphi_j) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$, $i = 1, \dots, N_\rho$, $j = 1, \dots, N_\varphi$. На рис. 2с и 2д приведены изображения фантома Дерензо после экстраполяционного уточнения с использованием одного и двух дополнительных измерений $(Rf)(\rho_i, \varphi_j, \varepsilon_i)$ при $\varepsilon_2 = 2.5^0$ и $\varepsilon_3 = 3^0$ соответственно. На рисунках показано, что экстраполированные изображения более четкие, чем необработанные изображения 2б. Это подтверждается количественными характеристиками – среднеквадратичная ошибка экстраполированных изображений меньше, чем неэкстраполированного. Причем экстраполирование по трем точкам дает наименьшую погрешность восстановления (табл. 1, второй столбец). В следующих столбцах табл. 1 приведены

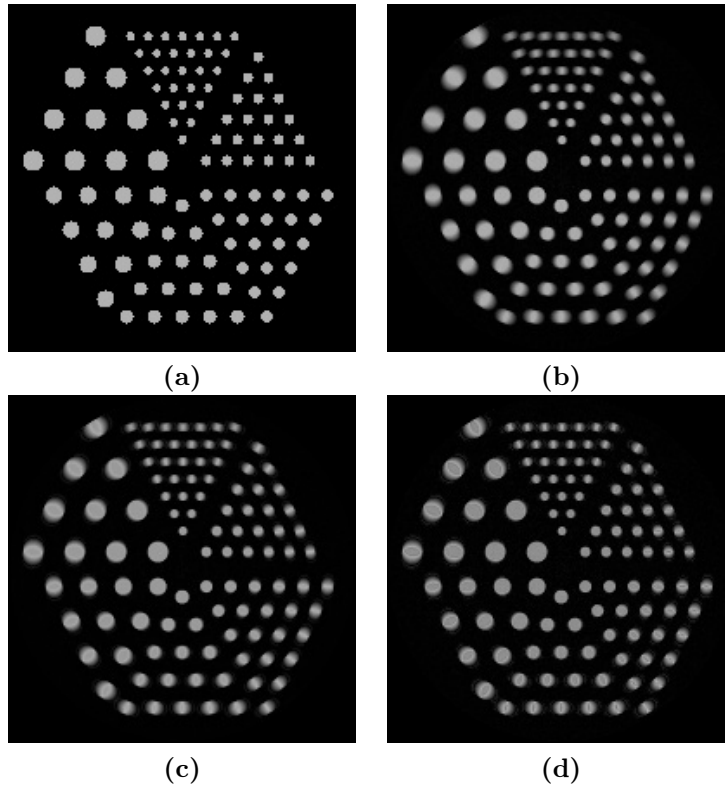


Рис. 2. (а) — графическое изображение фантома Дерензо; (б) — реконструкция фантома без экстраполяции при $\varepsilon_1 = 2^0$; (с) — реконструкция после экстраполяционного уточнения по двум точкам $\varepsilon_1 = 2^0$, $\varepsilon_2 = 3^0$; (д) — реконструкция после экстраполяционного уточнения по трем точкам $\varepsilon_1 = 2^0$, $\varepsilon_2 = 2.5^0$, $\varepsilon_3 = 3^0$.

значения среднеквадратичной ошибки восстановления фантома Дерензо при увеличении углов ε_i .

Отметим, что наибольшего прогресса удалось достичь при экстраполяционном уточнении с углами $\varepsilon_1 = 4^0$, $\varepsilon_2 = 5^0$, $\varepsilon_3 = 6^0$. В этом случае ошибка экстраполированного изображения в сравнении с неэкстраполированным изображением понизилась в $51.595/33.522 \approx 1.54$ раза. При увеличении углов до значений $\varepsilon_1 = 11^0$, $\varepsilon_2 = 12^0$, $\varepsilon_3 = 13^0$ погрешность экстраполированного по трем точкам решения обратной задачи превзошла ошибки неэкстраполированного и экстраполированного по двум точкам решений. На рис. 3, 4 приведены томограммы, восстановленные при помощи формул (10)–(12) по данным $\varepsilon_1 = 4^0$, $\varepsilon_2 = 5^0$, $\varepsilon_3 = 6^0$ и $\varepsilon_1 = 11^0$, $\varepsilon_2 = 12^0$, $\varepsilon_3 = 13^0$ соответственно.

Опираясь на результаты расчетов можно сделать вывод, что при небольших ε_i использование экстраполяционных формул высоких порядков оправдано, а при возрастании ε_i предпочтительнее пользоваться экстраполяцией по двум точкам, либо обходиться неэкстраполированным изображением. Такое заключение является следствием неустойчивости процедуры экстраполяции и находится в полном согласии с

Таблица 1. Относительная среднеквадратичная ошибка (в процентах) восстановления фантома Дерензо при помощи формул (10)–(12).

ε_1	2^0	4^0	6^0	8^0	11^0
ε_2	2.5^0	5^0	7^0	9^0	12^0
ε_3	3^0	6^0	8^0	10^0	13^0
Ошибка восстановления фантома без экстраполяции по формуле (12) при $\varepsilon = \varepsilon_1$	36.172	51.595	63.829	71.744	78.157
Ошибка восстановления фантома с экстраполяционным уточнением по формуле (11) при $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_3$	33.032	46.353	58.68	68.556	77.395
Ошибка восстановления фантома с экстраполяционным уточнением по формуле (11) при $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2$	32.274	44.689	57.077	67.366	77.069
Ошибка восстановления фантома с экстраполяционным уточнением по формуле (10) при $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	31.744	33.522	57.392	70.566	90.128

теорией некорректных задач [17, 18].

Для убедительной иллюстрации преимуществ алгоритмов экстраполяции мы рассмотрели тестовый пример для фантома, который описывается гладкой функцией вида

$$f(x, y) = \exp(-50(x + 0.2)^2 - 20(y + 0.2)^2) + \exp(-50(x - 0.15)^2 - 20(y + 0.2)^2) + \exp(-50(x - 0.4)^2 - 45(y - 0.55)^2) + \exp(-50x^2 - 45(y - 0.55)^2). \quad (13)$$

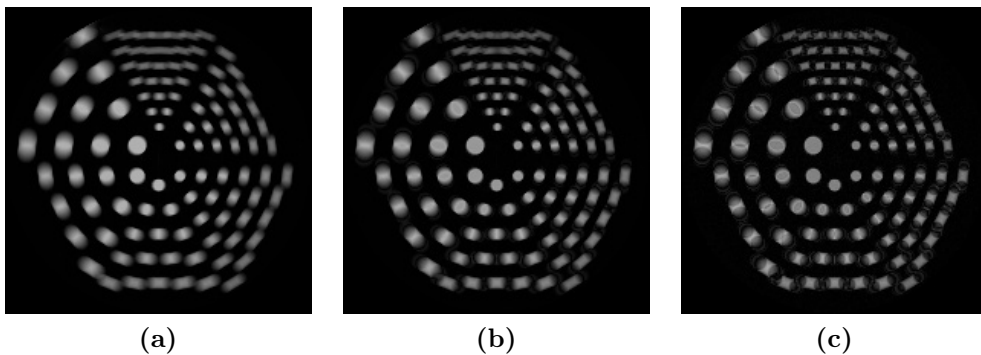


Рис. 3. (а) — реконструкция фантома Дерензо без экстраполяции при $\varepsilon_1 = 4^0$; (б) — реконструкция после экстраполяционного уточнения по двум точкам $\varepsilon_1 = 4^0$, $\varepsilon_2 = 6^0$; (с) — реконструкция после экстраполяционного уточнения по трем точкам $\varepsilon_1 = 4^0$, $\varepsilon_2 = 5^0$, $\varepsilon_3 = 6^0$.

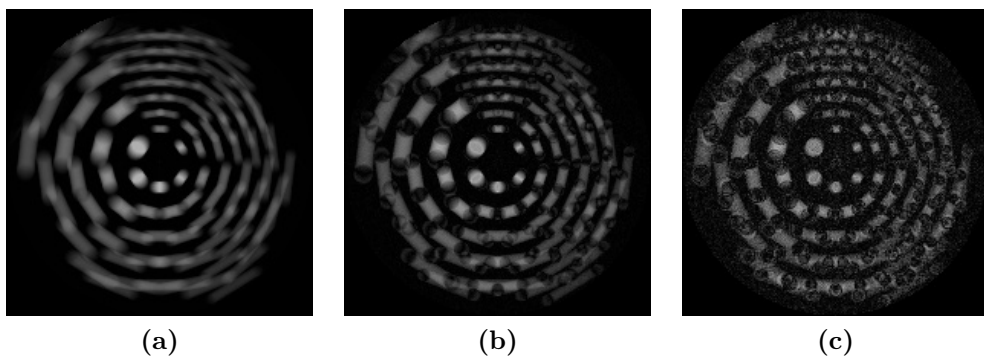


Рис. 4. (a) — реконструкция фантома Дерензо без экстраполяции при $\varepsilon_1 = 11^0$; (b) — реконструкция после экстраполяционного уточнения по двум точкам $\varepsilon_1 = 11^0$, $\varepsilon_2 = 12^0$; (c) — реконструкция после экстраполяционного уточнения по трем точкам $\varepsilon_1 = 11^0$, $\varepsilon_2 = 12^0$, $\varepsilon_3 = 13^0$.

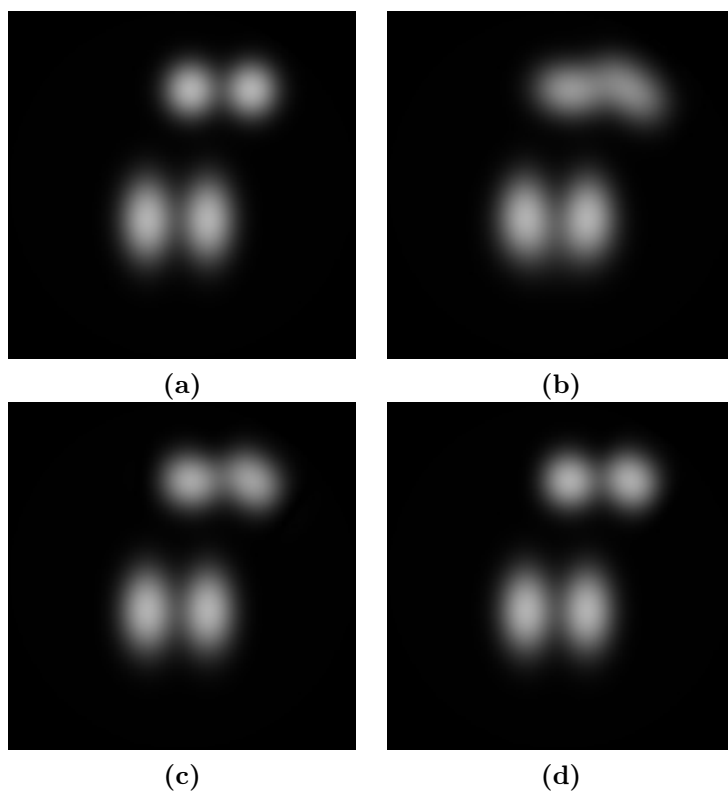


Рис. 5. (a) — графическое изображение фантома, заданного гладкой функцией (13); (b) — реконструкция фантома (13) без экстраполяционного уточнения при $\varepsilon_1 = 15^0$; (c) — реконструкция с экстраполяционным уточнением по двум точкам $\varepsilon_1 = 15^0$, $\varepsilon_2 = 16^0$; (d) — реконструкция с экстраполяционным уточнением по трем точкам $\varepsilon_1 = 15^0$, $\varepsilon_2 = 16^0$, $\varepsilon_3 = 17^0$.

Фантом представляет собой сумму четырех гауссианов: вершины двух из них сосредоточены вблизи центра круга, а вершины двух других ближе к границе круга (см. рис. 5а). В табл. 2 приведены относительные среднеквадратичные ошибки для фантома (13), возникшие при экстраполяционном уточнении с помощью формул (10), (11) и (12). В сравнении с фантомом Дерензо ошибка заметно уменьшилась даже для сравнительно больших значений ε , причем применение экстраполяционных формул более высокого порядка становится намного эффективнее. Так, например, для $\varepsilon_1 = 10^0$ ошибка восстановления по формуле четвертого порядка (10) меньше ошибки формулы второго порядка (11) в 5 раз. Визуальный анализ полученных изображений (см. на рис. 5b, 5c, 5d) иллюстрирует эффективность применения экстраполяционных алгоритмов для восстановления гладких функций.

Таблица 2. Относительная среднеквадратичная ошибка восстановления фантома, заданного гладкой функцией (13), при помощи формул (10)–(12)

ε_1	10^0	15^0	24^0	30^0
ε_2	11^0	16^0	25^0	31^0
ε_3	12^0	17^0	26^0	32^0
Ошибка восстановления фантома без экстраполяции по формуле (12) при $\varepsilon = \varepsilon_1$	9.293	17.362	29.127	34.178
Ошибка восстановления фантома с экстраполяционным уточнением по формуле (11) при $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_3$	2.306	7.6	21.608	28.596
Ошибка восстановления фантома с экстраполяционным уточнением по формуле (11) при $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2$	1.994	6.979	20.931	28.203
Ошибка восстановления фантома с экстраполяционным уточнением по формуле (10) при $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	0.397	2.42	13.989	25.757

Таблица 3. Относительная среднеквадратичная ошибка восстановления по формуле (10) для фантома (13) в областях интереса G_1 и G_2 (рис. 6).

ε_1	10^0	15^0	24^0	30^0
ε_2	11^0	16^0	25^0	31^0
ε_3	12^0	17^0	26^0	32^0
Ошибка в области G_1	0.041	0.134	1.159	3.399
Ошибка в области G_2	0.617	3.778	21.527	38.551

Еще одним важным аспектом модели микрофокусной томографии является неравномерность качества изображений вне зоны фокусировки. Схема сканирования фокусирующей системы, приведенной на рис. 1, в первую очередь направлена на увели-

чение разрешающей способности в центре объекта. Качественный анализ изображений 5b, 5c, 5d и количественные оценки среднеквадратичных ошибок, вычисленных в областях интереса G_1 и G_2 (см. рис. 6), свидетельствуют о достижении первоочередных целей фокусировки. Ошибка экстраполяции в области интереса G_1 , расположенной ближе к центру, на порядок меньше, чем ошибка в области G_2 .

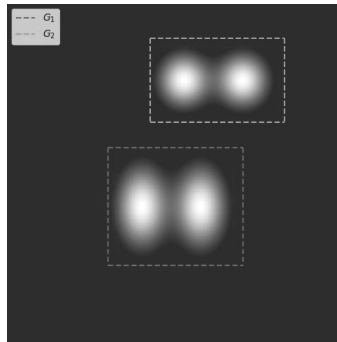


Рис. 6. На изображении фантома, описываемого формулой (13), выделены области интереса G_1 и G_2 в которых вычислена локальная среднеквадратичная ошибка.

Заключение

В работе исследована простейшая модель микрофокусной томографии, в основе которой лежит обобщенное преобразование Радона по вертикальным секторам с небольшим углом раствора ε . Предложены асимптотические решения задачи обращения интегрального преобразования второго и четвертого порядка точности, основанные на экстраполяции нескольких томографических изображений в область сверхмалых значений параметра ε . Продемонстрирована эффективность экстраполяционных методов на фантоме Дерензо и фантоме, являющемся линейной комбинацией нескольких гауссианов. Адаптивная регулировка уровня фокусировки ε , дополненная экстраполяционным уточнением, позволяет добиться существенного улучшения качества изображений, особенно в центральной части области и при восстановлении плавно меняющихся функций.

Ясно, что, переходя от идеализированной двумерной постановки задачи томографии к трехмерной, использующей конические источники излучения, также можно применить экстраполяционный подход, предложенный в работе. Конические источники излучения, формируя узко направленный конусообразный поток, обеспечивают направленную фокусировку и ограничивают зону взаимодействия излучения с материалом объекта, что заметно сокращает возникновение рассеянных фотонов, ухудшающих качество томографических изображений.

Список литературы

- [1] Наттерер Ф., *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, Москва, 1990.

-
- [2] Терещенко С. А., *Методы вычислительной томографии*, Физматлит, Москва, 2004.
- [3] Романов В. Г., “Лучевая постановка задачи акустической томографии”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **505**, (2022), 50–55.
- [4] Романов В. Г., “Обратная задача для нелинейного уравнения переноса”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:5, (2024), 1022–1028.
- [5] Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И., *Избранные задачи интегральной геометрии*, Добросвет, КДУ, Москва, 2007.
- [6] Sharafutdinov V. A., *Integral Geometry of Tensor Fields*, De Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [7] Деревцов Е. Ю., “Об одном обобщении экспоненциального лучевого преобразования в томографии”, *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, **18**:4, (2018), 29–42.
- [8] Аниконов Д. С., Коновалова Д. С., “Задача о неизвестной границе для обобщённого преобразования Радона в чётномерном пространстве”, *Матем. тр.*, **27**:3, (2024), 5–19.
- [9] Аниконов Д. С., Коновалова Д. С., “Проблема обращения преобразований Радона, определенных на псевдовыпуклых множествах”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **516**, (2024), 93–97.
- [10] Прохоров И. В., Яровенко И. П., “Повышение качества томографических изображений при облучении среды импульсами различной длительности”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **505**, (2022), 71–78.
- [11] Коваленко Е. О., Прохоров И. В., “Об одном экстраполяционном алгоритме улучшения качества гидролокационных изображений морского дна”, *Дальневост. матем. журн.*, **23**:2, (2023), 211–221.
- [12] Коваленко Е. О., Прохоров И. В., Сущенко А. А., “Экстраполяционные алгоритмы улучшения качества гидролокационных изображений”, *Вычислительные технологии*, **29**:3, (2024), 38–51.
- [13] Yarovenko I. P., Prokhorov I. V., “An extrapolation method for improving the quality of tomographic images using multiple short-pulse irradiations”, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **32**:1, (2024), 57–74.
- [14] Яровенко И. П., Ворновских П. А., Прохоров И. В., “Экстраполяция томографических изображений по данным многократного импульсного зондирования”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **27**:3, (2024), 177–195.
- [15] П. Арефьев Е., Прохоров И. В., “Экстраполяционный метод обращения обобщенного преобразования Радона”, *Дальневост. матем. журн.*, **25**:1, (2025), 13–20.
- [16] Derenzo S. E., “Mathematical Removal of Positron Range Blurring in High Resolution Tomography”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, **33**:1, (1986), 565–569.
- [17] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва, 1979.
- [18] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П., *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, Москва, 1980.

Поступила в редакцию
22 июня 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00460-26-00 при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

*Prokhorov I. V.*¹; *Shkuratova D. V.*² Methods of extrapolative refinement of tomograms with adaptive focusing of X-ray radiation. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2026. V. 26. No 1. P. 89–100.

¹Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

²Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

The problem of tomography of microobjects comparable with the width of an X-ray beam is reduced to the asymptotic inversion of the generalized Radon transform of the radiation absorption coefficient over vertical sectors with a small opening angle. A numerical algorithm based on the extrapolation of several tomographic images obtained as a result of inverting the Radon transform over sectors with variable opening angles determined by a pre-selected focal length is developed. Adjustment of the degree of focusing, supplemented by extrapolation refinement, provides a significant improvement in image quality, especially in the central part of the region and in the reconstruction of smooth functions.

Key words: *microfocus tomography, Radon transform, extrapolation, Derenzo phantom.*