

УДК 517.95 + 519.63

MSC2020 35Q93 + 78A46 + 65N21

© Ю. Э. Рогозина¹

Численная оптимизация толщин слоев в 2D задачах дизайна магнитных маскировочных оболочек

Рассматриваются задачи дизайна двумерных многослойных магнитных маскировочных оболочек. Предполагается, что проектируемые оболочки состоят из конечного числа кольцевых слоев разной толщины, заполненных изотропными средами с неизвестными магнитными проницаемостями. С помощью оптимизационного метода рассматриваемые задачи сводятся к экстремальным и исследуются их свойства. Для численного решения рассматриваемых задач и оптимизации толщин слоев в проектируемой оболочке предлагается численный алгоритм, основанный на методе роя частиц. Полученные результаты численного моделирования анализируются и сравниваются с результатами, полученными в предыдущих работах. Показывается, что предложенный подход позволяет проектировать более эффективные магнитные маскировочные слоистые оболочки с переменными толщинами слоев и, в частности, с использованием только двух доступных материалов, что позволит существенно упростить техническую реализацию маскировочного устройства.

Ключевые слова: *модель магнитостатики, обратная задача, маскировка, оболочка, оптимизация, метод роя частиц.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202611>

Введение

В настоящее время актуальным в современной математической физике остается направление, развивающее технологии управления физическими полями в сплошных средах. Основополагающие работы [1, 2] продемонстрировали, что с помощью метода координатных преобразований (КП) и спроектированной специальным образом маскировочной оболочки возможно управлять распространением электромагнитных волн так, что помещенный внутрь оболочки объект становится невидимым для наблюдателя. Позднее принципы метода КП нашли широкое применение и в

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, остров Русский, п. Аякс, 10. Электронная почта: uliyaspivak@gmail.com

смежных физических задачах при разработке различных типов маскировочных и экранирующих структур. В зависимости от свойств физических полей (волновых или статических) можно выделить акустическую [3], магнитную [4], тепловую [5] и электрическую [6] маскировки. Однако практическая реализация маскировочных структур (оболочек), полученных с помощью метода КП, сталкивается с рядом недостатков, связанных со свойствами заполняющих оболочки материалов, а также с геометрическими параметрами оболочек. В этой связи особую роль играет оптимизация параметров маскировочной оболочки, включающая определение ее формы, числа слоев, толщин слоев и характеристик материала, заполняющего оболочку (см., например, [7–10]). Разработка эффективных методов оптимизации позволяет повысить эффективность маскировки, минимизировать рассеяние и искажения поля при сохранении простоты технической реализации спроектированного устройства. Кроме того, учитывая, что задачи маскировки относятся к классу обратных задач, для их решения часто используется оптимизационный метод решения обратных задач (см. [11–15]), разработанный академиком А. Н. Тихоновым [16]. Данный метод при оптимизации многослойных маскировочных оболочек позволяет получить такие параметры, которые отвечают доступным природным или инженерным материалам.

В настоящей работе предлагается новый подход к проектированию двумерных многослойных магнитных маскировочных оболочек с целью улучшения полученных ранее результатов рассматриваемой задачи. В новом подходе совмещены идея использования оптимизационного метода решения обратных задач и численная оптимизация с помощью метода роя частиц толщин слоев и параметров проектируемой маскировочной оболочки. На основе сравнительного анализа полученных результатов показывается, что предложенный подход позволяет проектировать более эффективные оптимальные магнитные маскировочные слоистые оболочки с переменными толщинами слоев и, в частности, с использованием только двух доступных материалов, что позволит существенно упростить техническую реализацию маскировочного устройства.

1. Постановка прямой задачи магнитостатики на плоскости

Для того чтобы сформулировать магнитостатическую задачу на плоскости \mathbb{R}^2 , рассмотрим следующий сценарий. В плоскость \mathbb{R}^2 вносится магнитная маскировочная оболочка $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, дискретизированная на конечное число элементарных слоев $\Omega_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m\}$, $m = \overline{0, M+1}$, заполненных однородными изотропными средами с постоянными магнитными проницаемостями μ_m . Здесь $\Omega_0 = \{|\mathbf{x}| < a\}$ — внутренность оболочки Ω , $\Omega_e^\infty = \{|\mathbf{x}| > b\}$ — внешность области Ω , $a = R_0$, $b = R_M$. Предполагается, что вне некоторого диска B_R радиусом R , содержащего внутри себя Ω_m , $m = \overline{0, M}$, сосредоточены источники, создающие внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$ ($[\mathbf{H}] = A/m$), отвечающее потенциалу Φ_a . Наличие областей Ω_m , $m = \overline{1, M}$, в магнитном поле \mathbf{H}_a приводит к появлению дополнительного поля (рассеяния) Φ_s в Ω_e^∞ .

Обозначим через Φ_m сужение $\Phi|_{\Omega_m}$ полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ на подобласть Ω_m , $m = \overline{0, M+1}$, где $\Omega_{M+1} = \Omega_e^\infty \cap B_R$. Тогда прямая задача нахождения полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ сводится к нахождению $M+2$ полей Φ_m в областях Ω_m , $m = \overline{0, M}$, и Φ_s в Ω_e^∞ путем решения следующей задачи магнитостатики:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 &= 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \operatorname{div}(\mu_m \nabla\Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad \Delta\Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \\ \Phi_m &= \Phi_{m+1}, \quad \mu_m \frac{\partial\Phi_m}{\partial r} = \mu_{(m+1)} \frac{\partial\Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = \overline{0, M}, \\ \Phi_0(\mathbf{x}) &= O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad \Phi_s(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Теоретические аспекты решения данной задачи были детально исследованы и опубликованы научно-исследовательской группой под руководством Г. В. Алексева (см., например, [17, 18]).

В важном частном сценарии, когда внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$ однородно в \mathbb{R}^2 , т.е. когда $\Phi_a = -H_a r \cos\varphi$, $H_a = |\mathbf{H}_a|$, решение прямой задачи можно записать в форме: $\Phi[\mathbf{m}] = (\Phi_0[\mathbf{m}], \Phi_1[\mathbf{m}], \dots, \Phi_{M+1}[\mathbf{m}])$, отвечающей M -мерному вектору $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$, составленному из значений магнитных проницаемостей μ_m отдельных слоев Ω_m , $m = \overline{1, M}$. Используя метод разделения переменных, поля Φ_m можно представить в виде [14, 17]

$$\begin{aligned} \Phi_0(r, \varphi) &= A_0(r/b) \cos\varphi \text{ в } \Omega_0, \\ \Phi_m(r, \varphi) &= (A_m(r/b) + B_m(b/r)) \cos\varphi \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \\ \Phi_{M+1}(r, \varphi) &= (-H_a(r/b) + B_{M+1}(b/r)) \cos\varphi \text{ в } \Omega_{M+1}. \end{aligned}$$

Здесь A_0, A_m, B_m, B_{M+1} , $m = \overline{1, M}$ — неизвестные константы и $H_a = \text{const}$.

Указанные выше неизвестные константы A_0, A_m, B_m, B_{M+1} , $m = \overline{1, M}$, могут быть определены из условий непрерывности смежных полей Φ_m и Φ_{m+1} на их общей границе $r = R_m$, $m = \overline{0, M}$, образующих систему из $2M+2$ линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -A_0 + A_1 + B_1 c_0^2 &= 0, \\ -\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 - \mu_1 B_1 c_0^2 &= 0, \\ -A_m - B_m c_m^2 + A_{m+1} + B_{m+1} c_m^2 &= 0, \\ -\mu_m A_m + \mu_m B_m c_m^2 + \mu_{m+1} A_{m+1} - \mu_{m+1} B_{m+1} c_m^2 &= 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \\ -A_M - B_M + B_{M+1} &= H_a, \\ -\mu_M A_M + \mu_M B_M - \mu_{M+1} B_{M+1} &= \mu_{M+1} H_a. \end{aligned}$$

Здесь $c_m = b/R_m$, $m = \overline{0, M-1}$.

Учитывая тот факт, что задача магнитной маскировки относится к классу обратных задач, введем ниже определение (см. [15]).

Под обратной задачей магнитной маскировки будем понимать задачу нахождения вектора \mathbf{m} магнитных проницаемостей $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ маскировочной оболочки (Ω, \mathbf{m}) , исходя из выполнения следующих двух независимых условий:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi_0[\mathbf{m}] &= 0 \text{ в } \Omega_0 \quad (\text{т.е. } \Phi_0[\mathbf{m}] = \text{const в } \Omega_0), \\ \Phi_{M+1}[\mathbf{m}] &= \Phi_a|_{\Omega_{M+1}} \text{ в } \Omega_{M+1} \quad (\text{т.е. } \Phi_s[\mathbf{m}]|_{\Omega_{M+1}} = 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Первое условие в (3) означает, что внутреннее поле Φ_0 внутри области Ω_0 должно быть постоянным, тогда как второе условие в (3) означает, что рассеянное поле Φ_s в области Ω_{M+1} должно быть равно нулю. Оболочка (Ω, \mathbf{m}) , обеспечивающая выполнение обоих условий (3), называется идеальной магнитной маскировочной оболочкой.

Частный случай нахождения вектора проницаемостей \mathbf{m} из первого условия в (3) определяет задачу экранирования (или внутренней маскировки), в то время как нахождение \mathbf{m} из второго условия в (3) отвечает задаче внешней маскировки.

2. Формулировка экстремальных задач

Для того чтобы решить обратную задачу (3), мы применяем оптимизационный метод [16]. Следуя ему, сначала обозначим через $\Phi[\mathbf{m}, \mathbf{d}] = (\Phi_0[\mathbf{m}, \mathbf{d}], \Phi_1[\mathbf{m}, \mathbf{d}], \dots, \Phi_{M+1}[\mathbf{m}, \mathbf{d}])$ решение прямой задачи (1)–(2), где M -мерный вектор $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ и $(M-1)$ -мерный вектор толщин слоев $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{M-1})$ принадлежат, соответственно, ограниченному множеству K , S , имеющим вид

$$K = \{\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \in \mathbb{R}^M : 0 < \mu_{min} \leq \mu_m \leq \mu_{max}\},$$

$$S = \{\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{M-1}) \in \mathbb{R}^{M-1} : 0 < d_m < b - a\}.$$

Здесь заданные положительные константы μ_{min} и μ_{max} определяют нижнюю и верхнюю границы множества K .

Далее определим два функционала качества

$$J_i(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}, \mathbf{d}]\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}}, \quad J_e(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}, \mathbf{d}] - \Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}},$$

и сформулируем экстремальную задачу полной маскировки

$$J(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = (1/2)[J_i(\mathbf{m}, \mathbf{d}) + J_e(\mathbf{m}, \mathbf{d})] \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K, \quad \mathbf{d} \in S. \quad (4)$$

Для решения поставленной экстремальной задачи (4) мы применяем метод глобальной стохастической оптимизации — метод роя частиц (МРЧ) [19]. В стандартном МРЧ частицы взаимодействуют и перемещаются в пространстве поиска решений. Для частицы с точкой положения $\mathbf{x}_j = (\mathbf{m}_j, \mathbf{d}_j)$ и скоростью \mathbf{v}_j обновление ее скорости на новом временном шаге происходит в два этапа по следующим двум формулам:

$$\mathbf{v}_j^{i+1} = w\mathbf{v}_j^i + c_1 r_1 (\mathbf{p}_j^i - \mathbf{x}_j^i) + c_2 r_2 (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_j^i), \quad \mathbf{x}_j^{i+1} = \mathbf{x}_j^i + \mathbf{v}_j^{i+1}.$$

Метаоптимизация, т.е. подбор, параметров МРЧ w, c_1, c_2, r_1, r_2 представляет собой отдельную актуальную ветвь исследований [20]. В данной работе используются так называемые универсальные значения этих параметров [21]: $w = 0.72900$, $c_1 = 1.49445$, $c_2 = 1.49445$, $r_1, r_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Такой выбор значений параметров МРЧ обоснован тем, что именно эти значения были рекомендованы исследователями для использования в МРЧ в ряде научных статей и, в частности, в [20, 21], связанных с проверкой широкого диапазона значений параметров МРЧ на наборе тестовых задач, и показали высокую эффективность при решении ряда задач поиска минимума.

3. Результаты вычислительных экспериментов

В данном разделе обсудим результаты численного решения экстремальной задачи маскировки (4) с использованием разработанного оптимизационного алгоритма на основе МРЧ для следующих исходных значений параметров: $a=0.04$ м, $b=0.05$ м, $R=1$ м, $\mu_0=\mu_{M+1}=1$ и для пары значений $(0.0045;40)$, определяющих границы μ_{min} и μ_{max} множества управлений K . Размер роя частиц $N=25$, количество итераций $L=120$, магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, где $\Phi_a(r, \varphi) = -H_a r \cos\varphi$, $H_a = |\mathbf{H}_a| = 1$ А/м. Пусть $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{M-1})$ – вектор толщин слоев оболочки, который будет оптимизироваться с помощью МРЧ одновременно с оптимизацией магнитных проницаемостей, исходя из условий $R_m = \min\{R_{m-1} + d_m, b\}$, $a = R_0 < R_1 < R_2 < \dots < R_{M-1} < R_M = b$.

Найдем решение экстремальной задачи маскировки (4) при значениях параметров $\mu_{min}=0.0045$ и $\mu_{max}=40$. Здесь $\mu=0.0045$ соответствует известному метаматериалу – ниобий-титановому сплаву [22]; $\mu_{max}=40$ соответствует магнитной проницаемости закаленной нержавеющей стали. Этой паре отвечает контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 8889$.

В таблице 1 приведены данные, полученные в [23] для различных значений $M = \overline{1, 16}$, где численный алгоритм, основанный на методе роя частиц, оптимизировал только магнитные проницаемости всех слоев. Отметим, что полученные этим методом параметры отвечают схеме почти чередующегося дизайна 1-го либо 2-го типа. В этой связи напомним, что точный чередующийся дизайн 1-го либо 2-го типа характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} \text{1-й тип: } \mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_M^{opt} = \mu_{max}, \\ \mathbf{m}^{alt} \equiv (\mu_{min}, \mu_{max}, \dots, \mu_{min}, \mu_{max}); \\ \text{2-й тип: } \mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{max}, \quad \mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_M^{opt} = \mu_{min}, \\ \mathbf{m}^{alt} \equiv (\mu_{max}, \mu_{min}, \dots, \mu_{max}, \mu_{min}). \end{aligned}$$

В то же время схема почти чередующегося дизайна 1-го либо 2-го типа, отвечающая решению задачи маскировки, отличается тем, что равенство $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$ выполняется для всех управлений μ_m^{opt} , за исключением последнего μ_M^{opt} , которое принимает некоторое промежуточное значение между μ_{min} и μ_{max} : $\mu_{min} \leq \mu_M^{opt} \leq \mu_{max}$. В этом отличии и состоит существенный недостаток найденного решения: когда найденное значение μ_M^{opt} не соответствует какому-либо известному материалу, возникает

Таблица 1. $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 8889$, $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$, кроме μ_M^{opt} : \Leftrightarrow почти чередующийся дизайн.

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.0045	9.18	$2.28 \cdot 10^{-2}$
4	0.0045	17.95	$1.47 \cdot 10^{-3}$
10	40.0	0.96	$2.17 \cdot 10^{-4}$
16	40.0	20.04	$5.84 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2. $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 8889$, $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$: \Leftrightarrow чередующийся дизайн 1-го типа.

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt}, \mathbf{d}^{opt})$
2	0.0045	40.0	$9.05 \cdot 10^{-3}$
4	0.0045	40.0	$9.53 \cdot 10^{-4}$
10	0.0045	40.0	$6.49 \cdot 10^{-5}$
16	0.0045	40.0	$3.37 \cdot 10^{-5}$

техническая трудность, связанная с созданием этого материала и спроектированной маскировочной оболочки. Поэтому, несмотря на полученные малые значения функционала качества в таблице 1, например, $J(\mathbf{m}^{opt}) = 5.84 \cdot 10^{-5}$ при $M = 16$, что отвечает высокой эффективности многослойной маскировочной оболочки, реализовать технически данные распределения \mathbf{m}^{opt} непросто. Для того чтобы избавиться от указанного недостатка, в настоящей статье был разработан новый численный алгоритм, оптимизирующий, помимо магнитных проницаемостей всех слоев, еще и толщины этих слоев.

В таблице 2 приведены результаты численного решения экстремальной задачи маскировки (4) в случае тех же параметров $\mu_{min} = 0.0045$ и $\mu_{max} = 40$ с использованием нового алгоритма. Сравнение результатов таблицы 2 с данными таблицы 1 показывает, что полученные параметры магнитных проницаемостей в таблице 2 отвечают схеме точного чередующего дизайна 1-го типа, то есть в точности $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$. Этого удалось достигнуть за счет переменных толщин слоев, вычисленных методом роя частиц. Кроме того, минимальное значение функционала качества J хоть и несущественно, но уменьшилось и достигло значения $J(\mathbf{m}^{opt}, \mathbf{d}^{opt}) = 3.37 \cdot 10^{-5}$ при $M = 16$.

Таблица 3. Сравнение значений радиусов слоев при (а) $M = 4$ и (б) $M = 10$, $i = \overline{0, M}$.

(а)			(б)		
R_i	old	new	R_i	old	new
$a = R_0$	0.04	0.04	$a = R_0$	0.04	0.04
R_1	0.0425	0.0427	R_1	0.041	0.0409
R_2	0.045	0.0457	R_2	0.042	0.0418
R_3	0.0475	0.0488	R_3	0.043	0.0428
$b = R_M$	0.05	0.05	R_4	0.044	0.0438
			R_5	0.045	0.0448
			R_6	0.046	0.0458
			R_7	0.047	0.0468
			R_8	0.048	0.0478
			R_9	0.049	0.0490
			$b = R_M$	0.05	0.05

Более того, в таблице 3 при $M = 4$ и при $M = 10$ сравниваются значения радиусов слоев, вычисленных в предыдущей работе [23] во втором столбце таблицы 3 и в настоящей статье в третьем столбце таблицы 3; на рисунке 1(а) схематически изображена оптимизированная четырехслойная маскировочная оболочка со слоями разной ширины, а на рисунке 1(б) для того же случая приведено поведение линий уровня магнитного поля. Сравнение приведенных таблиц и рисунка 1 показывает, что даже малейший сдвиг радиуса слоя позволяет спроектировать более эффективную маскировочную оболочку, обладающую простотой технической реализации.

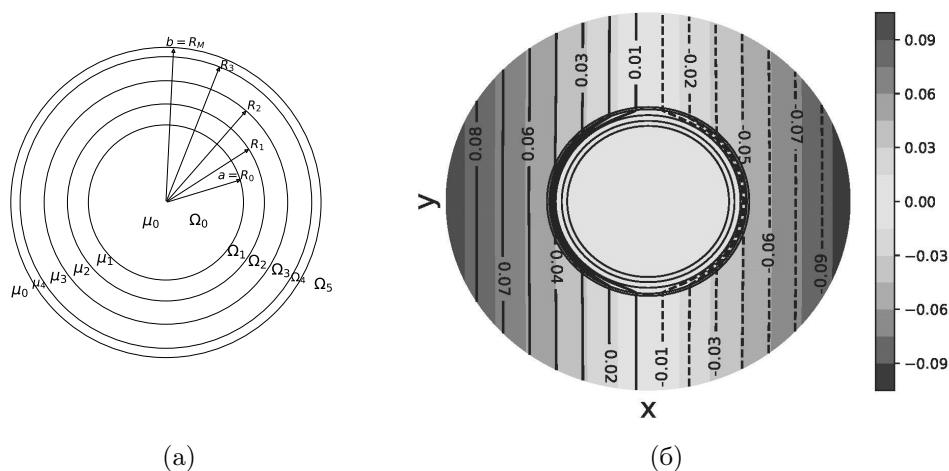


Рис. 1. Схематическое изображение оптимизированной многослойной маскировочной структуры для случая $M = 4$ (а) и поведение линий уровня магнитного поля (б).

Замечание. Результаты численного решения рассматриваемой в статье задачи магнитной маскировки для числа слоев $M \in (16, 24]$ показали, что дальнейшее увеличение их количества свыше $M = 16$ приводит лишь к незначительному снижению минимальных значений функционала качества и, следовательно, к незначительному приросту эффективности проектируемой маскировочной оболочки. При попытке дальнейшего увеличения $M > 24$ мы столкнулись с вычислительными трудностями, связанными с ухудшением обусловленности рассматриваемой в статье системы линейных алгебраических уравнений. Указанная особенность является прямым следствием принадлежности рассматриваемой обратной задачи магнитостатики к классу некорректно поставленных задач.

Заключение

В настоящей работе предложен новый подход к проектированию двумерных многослойных магнитных маскировочных оболочек. Задача магнитной маскировки предварительно с помощью оптимизационного метода решения обратных задач

была сведена к соответствующей экстремальной задаче, для решения которой был предложен и реализован новый численный алгоритм, основанный на методе роя частиц. Указанный численный алгоритм позволяет оптимизировать не только параметры в виде магнитных проницаемостей слоистой структуры оболочки, но и толщину каждого слоя. Такой подход к решению рассматриваемой задачи магнитной маскировки позволяет получать оптимальные решения, которым отвечают в сравнении с ранее полученными результатами более эффективные оболочки, обладающие очевидной простотой технической реализации.

Благодарности. Автор благодарит Г. В. Гренкина за обсуждение предложенного в данной работе подхода к решению задачи магнитной маскировки и полученных результатов.

Список литературы

- [1] Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R., “Controlling electromagnetic fields”, *Science*, **312**, (2006), 1780–1782.
- [2] Leonhardt U., “Optical conformal mapping”, *Science*, **312**, (2006), 1777–1780.
- [3] Cummer S. A., Popa B.-I., Shurig D., et al., “Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell”, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, (2008), 024301.
- [4] Wood B., Pendry J. B., “Metamaterials at zero frequency”, *J. Phys.: Condens. Matter*, **19**, (2007), 076208.
- [5] Guenneau S., Amra C., Veynante D., “Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux”, *Opt. Express.*, **20**, (2012), 8207–8218.
- [6] Yang F., Mei Z. L., Jin T. Z., et al., “DC electric invisibility cloak”, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, (2012), 053902.
- [7] Tereshko D. A., “Numerical analysis of inverse problems for electric field measurements”, *PIERS-Toyama 2018 – Proceedings*, 2018, 1603–1608.
- [8] Michaloglou A., Tsitsas N. L., “Feasible optimal solutions of electromagnetic cloaking problems by chaotic accelerated particle swarm optimization”, *Mathematics*, **9**, (2021), 2725.
- [9] Zaremanesh M., Bahrami A., “Multilayer acoustic invisibility cloak based on composite lattice”, *Sci. Rep.*, **12**, (2022), 16096.
- [10] Лобанов А. В., “Численная оптимизация в задачах дизайна многослойных оболочек, состоящих из гиперболических метаматериалов”, *Дальневосточный математический журнал*, **24**, (2024), 220–234.
- [11] Peralta I., Fachinotti V. D., “Optimization-based design of heat flux manipulation devices with emphasis on fabricability”, *Sci. Rep.*, **7**, (2017), 6261.
- [12] Alekseev G. V., Tereshko D. A., “Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **135**, (2019), 1269–1277.
- [13] Alekseev G., Lobanov A., “Optimization method for solving cloaking and shielding problems for a 3D model of electrostatics”, *Mathematics*, **11**, (2023), 1395.
- [14] Алексеев Г. В., *Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе*, Дальнаука, Владивосток, 2016.
- [15] Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А., *Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2021.
- [16] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

- [17] Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э., “Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Дифф. уравнения*, **54**, (2018), 1155–1166.
- [18] Спивак Ю. Э., “Оптимизационный метод в двумерных задачах магнитной маскировки”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16**, (2019), 812–825.
- [19] Kennedy J., Eberhart R., “Particle swarm optimization”, *Proc. IEEE Int. Conf. on N.N.*, **IV**, (1995), 1942–1948.
- [20] Bai Q., “Analysis of particle swarm optimization algorithm”, *Computer and Information Science*, **3**, (2010), 180–184.
- [21] Bai Z., Li W., Wang L., “Emission optimization using particle swarm algorithm”, *Proc. IPAC2011*, **1**, (2011), 2271–2273.
- [22] Itoh I., Kazuo K., Hiroaki O., “NbTi/Nb/Cu multilayer composite materials for superconducting magnetic shielding”, *Nippon Steel Tech. Rep.*, **85**, (2002), 118–124.
- [23] Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э., “Численный анализ двумерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Дифф. уравнения*, **56**, (2020), 1252–1262.

Поступила в редакцию
30 октября 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00) и при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

Rogozina Yu. E.^{1,2} Numerical optimization of layer thicknesses in 2D design problems of magnetic cloaks. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2026. V. 26. No 1. P. 101–109.

¹Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

² Far Eastern Federal University

ABSTRACT

The design problems of two-dimensional multilayer magnetic cloaking shells are considered. It is assumed that the designed shells consist of a finite number of circular layers of different thicknesses filled with isotropic media with unknown magnetic permeabilities. Using the optimization method, the problems under consideration are reduced to control problems and their properties are investigated. For numerical solution of the problems under consideration and optimization of layer thicknesses in the designed shell, a numerical algorithm based on the particle swarm optimization method is proposed. The results of numerical modeling are analyzed and compared with the results obtained in previous works. It is shown that the proposed approach allows designing more effective magnetic cloaking layered shells with variable layer thicknesses and, in particular, using only two available materials, which will significantly simplify the technical implementation of the cloaking device.

Key words: *magnetostatic model, inverse problem, cloaking, shell, optimization, particle swarm optimization method.*