Дальневосточный математический журнал. 2026. Т. 26. № 1. С. 110–122

УДК 517.583+512.742.72
MSC2020 14T90

© М. А. Романов[1]

Формулы сложения для частного случая последовательности Сомос-6

Найдены формулы сложения для частного случая последовательности Сомос-6.

Ключевые слова: *последовательности Сомоса, последовательности конечного ранга, формулы сложения.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202612

Введение

Пусть $k \geqslant 2$ — натуральное число. Последовательностью Сомос-k называется числовая последовательность $\{S_n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$, определяемая рекуррентным соотношением k-го порядка

$$S_{n+k} S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \alpha_i S_{n+k-i} S_{n+i}, \tag{1}$$

где α_i $(1 \leqslant i \leqslant k/2)$ — постоянные. В дальнейшем будем предполагать, что $S_n \neq 0$ для всех n.

Среди последовательностей Сомоса можно выделить класс, состоящий из последовательностей конечного ранга. Последовательность $\{S_n\}$ имеет конечный ранг (см. [1]), если для любых $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства

$$S_{m+n} S_{m-n} = \sum_{i=1}^{r_0} f_i(m) g_i(n),$$

$$S_{m+n+1} S_{m-n} = \sum_{i=1}^{r_1} \tilde{f}_i(m) \tilde{g}_i(n)$$

с некоторыми $f_i(n)$, $g_i(n)$, $\tilde{f}_i(n)$, $\tilde{g}_i(n)$ и минимально возможными конечными r_0, r_1. Число $r = \max(r_0, r_1)$ называется рангом этой последовательности. Э. Хоун [2] и К. Сворт [3] показали, что для последовательности Сомос-4 при $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$

$$S_n = A B^n \frac{\sigma(nz + z_0)}{\sigma(z)^{n^2}},$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60. Электронная почта: romanov@iam.dvo.ru

где $A,B,z,z_0\in\mathbb{C}$, а $\sigma(z)=\sigma(z;g_2,g_3)$ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с эллиптической кривой $y^2=4x^3-g_2x-g_3$. Из теоремы сложения для сигма-функции следует, что в общем случае ранг последовательности Сомос-4 равен 2. В работе [4] (см. также [5, теорема 1]) показано, что последовательность

$$S_n = AB^nC^{n^2-1}\frac{\sigma(n\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0)}{\sigma(\boldsymbol{v})^{n^2}}$$

является последовательностью Сомос-6 и удовлетворяет рекуррентному соотношению (1) при $k=6$ с коэффициентами

$$\alpha_1 = C^{10}\frac{\sigma^2(3\boldsymbol{v})}{\sigma^{10}(\boldsymbol{v})\sigma^2(2\boldsymbol{v})}\frac{\wp_{22}(3\boldsymbol{v})-\wp_{22}(\boldsymbol{v})}{\wp_{22}(2\boldsymbol{v})-\wp_{22}(\boldsymbol{v})},$$

$$\alpha_2 = C^{16}\frac{\sigma^2(3\boldsymbol{v})}{\sigma^{18}(\boldsymbol{v})}\frac{\wp_{22}(2\boldsymbol{v})-\wp_{22}(3\boldsymbol{v})}{\wp_{22}(2\boldsymbol{v})-\wp_{22}(\boldsymbol{v})},$$

$$\alpha_3 = C^{18}\frac{\sigma^2(3\boldsymbol{v})}{\sigma^{18}(\boldsymbol{v})}\left(\wp_{11}(3\boldsymbol{v})-\wp_{11}(2\boldsymbol{v})\frac{\wp_{22}(3\boldsymbol{v})-\wp_{22}(\boldsymbol{v})}{\wp_{22}(2\boldsymbol{v})-\wp_{22}(\boldsymbol{v})}-\wp_{11}(\boldsymbol{v})\frac{\wp_{22}(2\boldsymbol{v})-\wp_{22}(3\boldsymbol{v})}{\wp_{22}(2\boldsymbol{v})-\wp_{22}(\boldsymbol{v})}\right),$$

при условии, что

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \wp_{12}(\boldsymbol{v}) & \wp_{12}(2\boldsymbol{v}) & \wp_{12}(3\boldsymbol{v})\\ \wp_{22}(\boldsymbol{v}) & \wp_{22}(2\boldsymbol{v}) & \wp_{22}(3\boldsymbol{v})\end{pmatrix} = 0.$$

Здесь $\sigma:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ — сигма-функция Клейна рода 2, $\wp_{ij}(\boldsymbol{u})=-\dfrac{\partial^2\ln\sigma(\boldsymbol{u})}{\partial u_i\partial u_j}$ — гиперэллиптические функции Клейна, $A,B,C\in\mathbb{C}$, $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_0\in\mathbb{C}^2$. В свою очередь, из формулы сложения для сигма-функции Клейна (см., например, [6, гл. 5]) следует, что ранг последовательности Сомос-6 равен 4.

В работе [7] были найдены формулы сложения для последовательности Сомос-4:

$$\begin{aligned} W_1^2S_{n+k}S_{n-k} &= W_k^2S_{n+1}S_{n-1}-W_{k+1}W_{k-1}S_n^2,\\ W_1W_2S_{n+k+1}S_{n-k} &= W_kW_{k+1}S_{n+2}S_{n-1}-W_{k+2}W_{k-1}S_{n+1}S_n,\end{aligned}$$

где $W_k=\dfrac{\sigma(kz)}{\sigma(z)^{k^2}}$. В статье А.В. Устинова [8] был предложен элементарный (не использующий теорию эллиптических функций) подход к изучению свойств последовательности Сомос-4.

В данной работе мы рассмотрим последовательность Сомос-6, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$S_{n+3}S_{n-3} = \alpha S_{n+2}S_{n-2}+\gamma S_n^2, \tag{2}$$

в котором $\alpha\gamma\neq 0$. Эта ситуация возможна, когда

$$\wp_{22}(2\boldsymbol{v})-\wp_{22}(3\boldsymbol{v}) = 0.$$

В этом случае

$$\alpha_2 = 0,\quad \alpha=\alpha_1 = C^{10}\frac{\sigma^2(3\boldsymbol{v})}{\sigma^{10}(\boldsymbol{v})\sigma^2(2\boldsymbol{v})},\quad \gamma=\alpha_3 = C^{18}\frac{\sigma^2(3\boldsymbol{v})}{\sigma^{18}(\boldsymbol{v})}(\wp_{11}(3\boldsymbol{v})-\wp_{11}(2\boldsymbol{v})),$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp_{12}(\boldsymbol{v}) & \wp_{12}(2\boldsymbol{v}) & \wp_{12}(3\boldsymbol{v}) \\ \wp_{22}(\boldsymbol{v}) & \wp_{22}(2\boldsymbol{v}) & \wp_{22}(2\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} = (\wp_{12}(2\boldsymbol{v}) - \wp_{12}(3\boldsymbol{v}))(\wp_{22}(2\boldsymbol{v}) - \wp_{22}(\boldsymbol{v})) = 0,$$

откуда

$$\wp_{12}(2\boldsymbol{v}) - \wp_{12}(3\boldsymbol{v}) = 0.$$

Опираясь на некоторые идеи работы [8], мы устанавливаем следующие результаты.

Теорема 1. *Для элементов последовательности $\{S_n\}$, определенной уравнением (2), при любых $n, k \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство*

$$S_{n+k}S_{n-k} = a_k S_{n+4}S_{n-4} + b_k S_{n+2}S_{n-2} + c_k S_{n+1}S_{n-1} + d_k S_n^2, \tag{3}$$

в котором элементы последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{gathered}
\alpha\gamma a_{k-1}a_{k+1} + a_k d_k = 0,\\
\alpha b_{k-1}b_{k+1} + \alpha^2\gamma a_k b_k + (J+\alpha^3)a_k d_k + c_k d_k - \alpha^2\gamma I a_k^2 = 0,\\
\alpha\gamma c_{k-1}c_{k+1} - (\alpha^2\gamma J + \alpha^5\gamma)a_k b_k + (J^2 + 3\alpha^3 J + 2\alpha^6)a_k d_k + \gamma^2 b_k d_k +\\
+(J+\alpha^3)c_k d_k - \alpha\gamma d_k^2 = 0,\\
d_{k-1}d_{k+1} - \alpha^2\gamma a_k c_k - (\alpha^2\gamma J + \alpha^5\gamma)a_k^2 = 0,\\
\alpha\gamma(a_{k-1}b_{k+1} + a_{k+1}b_{k-1}) + I a_k d_k - b_k d_k - \alpha^2\gamma^2 a_k^2 = 0,\\
\alpha\gamma(a_{k-1}c_{k+1} + a_{k+1}c_{k-1}) + \alpha^2\gamma a_k b_k - (2J + 3\alpha^3)a_k d_k - c_k d_k = 0,\\
\gamma(a_{k-1}d_{k+1} + a_{k+1}d_{k-1}) + (J+\alpha^3)a_k b_k + b_k c_k - \gamma^3 a_k^2 = 0,\\
\alpha\gamma(b_{k-1}c_{k+1} + b_{k+1}c_{k-1}) + \alpha^2\gamma I a_k b_k - (IJ + 2\alpha^3 I + \gamma^3)a_k d_k + \alpha^3 b_k d_k - I c_k d_k +\\
+(\alpha^2\gamma^2 J + \alpha^5\gamma^2)a_k^2 - \alpha^2\gamma b_k^2 = 0,\\
b_{k-1}d_{k+1} + b_{k+1}d_{k-1} + \gamma^2 a_k b_k - (J + 2\alpha^3)a_k c_k - (\gamma^2 I + \alpha^3 J + \alpha^6)a_k^2 - c_k^2 = 0,\\
\gamma(c_{k-1}d_{k+1} + c_{k+1}d_{k-1}) + (\gamma^2 I - J^2 - 2\alpha^3 J - \alpha^6)a_k b_k + \gamma^3 a_k c_k - \alpha\gamma I a_k d_k -\\
-(J+\alpha^3)b_k c_k + \alpha\gamma b_k d_k + (\gamma^3 J + \alpha^3\gamma^3)a_k^2 - \gamma^2 b_k^2 = 0.
\end{gathered}$$

При этом

$$\begin{gathered}
a_0 = b_0 = c_0 = 0, \quad d_0 = 1,\\
a_1 = b_1 = d_1 = 0, \quad c_1 = 1,\\
a_2 = c_2 = d_2 = 0, \quad b_2 = 1,\\
a_3 = c_3 = 0, \quad b_3 = \alpha, \quad d_3 = \gamma,\\
b_4 = c_4 = d_4 = 0, \quad a_4 = 1.
\end{gathered}$$

Теорема 2. *Для элементов последовательности $\{S_n\}$, определенной уравнением (2), при любых $n, k \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство*

$$S_{n+k+1}S_{n-k} = \tilde{a}_k S_{n+4}S_{n-3} + \tilde{b}_k S_{n+3}S_{n-2} + \tilde{c}_k S_{n+2}S_{n-1} + \tilde{d}_k S_{n+1}S_n, \tag{4}$$

в котором элементы последовательностей $\{\tilde a_k\}$, $\{\tilde b_k\}$, $\{\tilde c_k\}$, $\{\tilde d_k\}$ *удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$\begin{gathered}
\alpha\gamma\tilde a_{k-1}\tilde a_{k+1}+\tilde b_k\tilde c_k=0,\\
\alpha\tilde b_{k-1}\tilde b_{k+1}+\gamma\tilde a_k\tilde c_k+\alpha^2\gamma\tilde a_k^2=0,\\
\gamma\tilde c_{k-1}\tilde c_{k+1}-(\alpha^2J+\alpha^5)\tilde a_k\tilde b_k-\alpha^2\gamma\tilde a_k\tilde d_k=0,\\
\alpha\tilde d_{k-1}\tilde d_{k+1}+(\alpha^2J+\alpha^5)\tilde a_k\tilde b_k+\gamma I\tilde a_k\tilde c_k+(J+\alpha^3)\tilde b_k\tilde c_k+\gamma\tilde c_k\tilde d_k=0,\\
\alpha\gamma(\tilde a_{k-1}\tilde b_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde b_{k-1})-\alpha^2\tilde a_k\tilde d_k-\tilde c_k\tilde d_k=0,\\
\gamma(\tilde a_{k-1}\tilde c_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde c_{k-1})+(J+\alpha^3)\tilde a_k\tilde b_k+\gamma\tilde a_k\tilde d_k-\alpha\tilde b_k\tilde c_k-\gamma\tilde b_k^2=0,\\
\alpha\gamma(\tilde a_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde d_{k-1})-\gamma^2\tilde a_k\tilde c_k-I\tilde b_k\tilde c_k+\alpha^2\tilde b_k\tilde d_k=0,\\
\gamma(\tilde b_{k-1}\tilde c_{k+1}+\tilde b_{k+1}\tilde c_{k-1})+\gamma I\tilde a_k\tilde b_k+\alpha^3\tilde a_k\tilde d_k+\gamma\tilde b_k\tilde d_k+\alpha\tilde c_k\tilde d_k-\gamma^3\tilde a_k^2=0,\\
\alpha(\tilde b_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde b_{k+1}\tilde d_{k-1})-\alpha^2\gamma\tilde a_k\tilde b_k-(J+2\alpha^3)\tilde a_k\tilde c_k-\gamma\tilde b_k\tilde c_k-\\
-(\alpha^2J+\alpha^5)\tilde a_k^2-\alpha\tilde c_k^2=0,\\
\gamma(\tilde c_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde c_{k+1}\tilde d_{k-1})-(IJ+\alpha^3I-\gamma^3)\tilde a_k\tilde b_k+\alpha\gamma^2\tilde a_k\tilde c_k-\gamma I\tilde a_k\tilde d_k-\\
-(J+\alpha^3)\tilde b_k\tilde d_k-\gamma\tilde d_k^2=0.
\end{gathered}$$

При этом

$$\begin{gathered}
\tilde a_0=\tilde b_0=\tilde c_0=0,\quad \tilde d_0=1,\\
\tilde a_1=\tilde b_1=\tilde d_1=0,\quad \tilde c_1=1,\\
\tilde a_2=\tilde c_2=\tilde d_2=0,\quad \tilde b_2=1,\\
\tilde b_3=\tilde c_3=\tilde d_3=0,\quad \tilde a_3=1.
\end{gathered}$$

В сформулированных теоремах через I, J обозначены первые интегралы уравнения (2) (см. следующий параграф).

Замечание. Система рекуррентных соотношений в теореме 1 переопределена. Если для некоторого k

$$a_{k-1}\neq 0,\quad b_{k-1}\neq 0,\quad c_{k-1}\neq 0,\quad d_{k-1}\neq 0,$$

то для вычисления a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1} достаточно первых четырех соотношений, в противном случае следует использовать остальные. Аналогичное замечание справедливо и для теоремы 2.

1. Вспомогательные сведения

Для любой последовательности $\{S_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ положим

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_S^{(0)}\binom{m_0,\dots,m_r}{n_0,\dots,n_r}=\det\big((S_{m_i+n_j}S_{m_i-n_j})_{i,j=0}^r\big),\\
\mathcal{D}_S^{(1)}\binom{m_0,\dots,m_r}{n_0,\dots,n_r}=\det\big((S_{m_i+n_j+1}S_{m_i-n_j})_{i,j=0}^r\big).
\end{gathered}$$

Пусть $\{S_n\}$ — последовательность конечного ранга r. Тогда r — наименьшее натуральное число, при котором выполняются равенства

$$\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix} m_0,\dots,m_r \\ n_0,\dots,n_r \end{pmatrix} = \mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} m_0',\dots,m_r' \\ n_0',\dots,n_r' \end{pmatrix} = 0$$

для любых $m_i,\ n_i,\ m_i',\ n_i' \in \mathbb{Z}$ $(i=0,\dots,r)$ (см. [1]).

Введем новую переменную

$$h_n = \frac{S_{n+1}S_{n-1}}{S_n^2}$$

и положим

$$F_k(n) = \frac{S_{n+k}S_{n-k}}{S_n^2}, \quad G_k(n) = \frac{S_{n+k+1}S_{n-k}}{S_{n+1}S_n}.$$

Поскольку $F_{-k}(n)=F_k(n)$ и $G_{-k}(n)=G_{k-1}(n)$, то ограничимся случаем $k\geqslant 0$. Функции F_k и G_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$F_{k-1}(n)F_{k+1}(n) = F_1^2(n)F_k(n-1)F_k(n+1),$$
$$G_{k-1}(n)G_{k+1}(n) = G_1(n)G_k(n-1)G_k(n+1)$$

с начальными значениями

$$F_0(n) = 1, \quad F_1(n) = h_n,$$
$$G_0(n) = 1, \quad G_1(n) = h_n h_{n+1}.$$

Уравнение (2) в новых переменных принимает вид

$$h_{n-2}h_{n-1}^2 h_n^3 h_{n+1}^2 h_{n+2} = \alpha h_{n-1}h_n^2 h_{n+1} + \gamma. \tag{5}$$

Для дальнейшей работы нам будет удобнее представить $F_k(n)$ и $G_k(n)$ в виде функций от четырех последовательных элементов последовательности $\{h_n\}$, в качестве которых выберем $h_{n-2},\ h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1}$. С этой целью введем отображение $T\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^4 \to \mathbb{C}^4$ по формуле

$$T\boldsymbol{u} = \left(u_2, u_3, u_4, \frac{\alpha u_2 u_3^2 u_4 + \gamma}{u_1 u_2^2 u_3^3 u_4^2}\right) \quad (\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3,u_4))$$

и определим новые функции Φ_k и Ψ_k соотношениями

$$\Phi_0(\boldsymbol{u}) = 1, \quad \Phi_1(\boldsymbol{u}) = u_3,$$
$$\Psi_0(\boldsymbol{u}) = 1, \quad \Psi_1(\boldsymbol{u}) = u_3 u_4,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{k-1}(\boldsymbol{u})\Phi_{k+1}(\boldsymbol{u}) &= \Phi_1^2(\boldsymbol{u})\Phi_k(T^{-1}\boldsymbol{u})\Phi_k(T\boldsymbol{u}), \\ \Psi_{k-1}(\boldsymbol{u})\Psi_{k+1}(\boldsymbol{u}) &= \Psi_1(\boldsymbol{u})\Psi_k(T^{-1}\boldsymbol{u})\Psi_k(T\boldsymbol{u}), \end{aligned} \tag{6}$$

где T^{-1} — обратное к T отображение, которое определяется равенством

$$T^{-1}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\alpha u_1 u_2^2 u_3 + \gamma}{u_1^2 u_2^3 u_3^2 u_4}, u_1, u_2, u_3\right).$$

С помощью уравнения (5) нетрудно заметить, что

$$T(h_{n-2},h_{n-1},h_n,h_{n+1})=(h_{n-1},h_n,h_{n+1},h_{n+2}),$$

поэтому из определения функций F_k, $\varPhi_k$, G_k, $\varPsi_k$ следует, что

$$F_k(n)=\varPhi_k(h_{n-2},h_{n-1},h_n,h_{n+1}),\quad G_k(n)=\varPsi_k(h_{n-2},h_{n-1},h_n,h_{n+1}).$$

Положим

$$I(\boldsymbol{u})=\alpha\gamma\left(\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+\frac{1}{u_3u_4}\right)+\gamma(u_1u_2u_3+u_2u_3u_4)+\frac{\gamma^2}{u_1u_2^2u_3^2u_4},$$

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u})=\alpha\gamma\left(\frac{u_1u_2}{u_4}+\frac{u_3u_4}{u_1}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{u_1u_2u_3}+\frac{1}{u_2u_3u_4}\right)+\\ +\alpha^2\gamma\left(\frac{1}{u_1u_2^2u_3}+\frac{1}{u_2u_3^2u_4}\right)+\frac{\alpha\gamma^2}{u_1u_2^3u_3^3u_4}+\gamma u_1u_2^2u_3^2u_4.\end{aligned}$$

Уравнение (5) имеет два независимых первых интеграла (см. [5, равенства (2.5) и замечание 5], [4] для общего уравнения Сомос-6)

$$I=I(h_n,h_{n+1},h_{n+2},h_{n+3}),$$
$$J=J(h_n,h_{n+1},h_{n+2},h_{n+3}).$$

Величины I и J не зависят от n, что равносильно выполнению для любого $\boldsymbol{u}\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^4$ равенств

$$I(T\boldsymbol{u})=I(\boldsymbol{u}),\quad J(T\boldsymbol{u})=J(\boldsymbol{u}).$$

2. Доказательство теоремы 1

Ранг последовательности $\{S_n\}$ равен 4, поэтому для любых целых k, n, n_1, n_2, n_3, n_4

$$\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix}n,n_1,n_2,n_3,n_4\\ k,4,2,1,0\end{pmatrix}=0.$$

Разложив определитель по первой строке, получим равенство

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix}n_1,n_2,n_3,n_4\\ 4,2,1,0\end{pmatrix}S_{n+k}S_{n-k}-\\ -\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix}n_1,n_2,n_3,n_4\\ k,2,1,0\end{pmatrix}S_{n+4}S_{n-4}+\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix}n_1,n_2,n_3,n_4\\ k,4,1,0\end{pmatrix}S_{n+2}S_{n-2}-\\ -\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix}n_1,n_2,n_3,n_4\\ k,4,2,0\end{pmatrix}S_{n+1}S_{n-1}+\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix}n_1,n_2,n_3,n_4\\ k,4,2,1\end{pmatrix}S_n^2=0.\end{aligned}$$

Выбирая n_1, n_2, n_3, n_4 так, чтобы

$$\mathcal{D}_S^{(0)}\begin{pmatrix}n_1,n_2,n_3,n_4\\ 4,2,1,0\end{pmatrix}\neq 0,$$

получаем разложение (3), которое в терминах функций $\varPhi_k$ имеет вид

$$\varPhi_k(\boldsymbol{u}) = a_k\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + b_k\varPhi_2(\boldsymbol{u}) + c_k\varPhi_1(\boldsymbol{u}) + d_k.$$

Подставив его в первое из равенств (6), получим соотношение

$$\begin{gathered}
a_{k-1}a_{k+1}\varPhi_4^2(\boldsymbol{u}) + b_{k-1}b_{k+1}\varPhi_2^2(\boldsymbol{u}) + c_{k-1}c_{k+1}\varPhi_1^2(\boldsymbol{u}) + d_{k-1}d_{k+1}+\\
+(a_{k-1}b_{k+1} + a_{k+1}b_{k-1})\varPhi_2(\boldsymbol{u})\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + (a_{k-1}c_{k+1} + a_{k+1}c_{k-1})\varPhi_1(\boldsymbol{u})\varPhi_4(\boldsymbol{u})+\\
+(a_{k-1}d_{k+1} + a_{k+1}d_{k-1})\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + (b_{k-1}c_{k+1} + b_{k+1}c_{k-1})\varPhi_1(\boldsymbol{u})\varPhi_2(\boldsymbol{u})+\\
+(b_{k-1}d_{k+1} + b_{k+1}d_{k-1})\varPhi_2(\boldsymbol{u}) + (c_{k-1}d_{k+1} + c_{k+1}d_{k-1})\varPhi_1(\boldsymbol{u}) =\\
= \varPhi_1^2(\boldsymbol{u})\left(a_k^2\varPhi_4(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_4(T\boldsymbol{u}) + b_k^2\varPhi_2(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_2(T\boldsymbol{u}) + c_k^2\varPhi_1(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_1(T\boldsymbol{u}) + d_k^2\right)+\\
+a_kb_kP_{24}(\boldsymbol{u}) + a_kc_kP_{14}(\boldsymbol{u}) + a_kd_kP_{04}(\boldsymbol{u}) + b_kc_kP_{12}(\boldsymbol{u}) + b_kd_kP_{02}(\boldsymbol{u}) + c_kd_kP_{01}(\boldsymbol{u}),
\end{gathered}$$

где

$$P_{ij}(\boldsymbol{u}) = \varPhi_1^2(\boldsymbol{u})\left(\varPhi_i(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_j(T\boldsymbol{u}) + \varPhi_j(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_i(T\boldsymbol{u})\right).$$

Согласно первому соотношению в (6),

$$\begin{gathered}
\varPhi_1^2(\boldsymbol{u})\left(a_k^2\varPhi_4(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_4(T\boldsymbol{u}) + b_k^2\varPhi_2(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_2(T\boldsymbol{u}) + c_k^2\varPhi_1(T^{-1}\boldsymbol{u})\varPhi_1(T\boldsymbol{u}) + d_k^2\right) =\\
= a_k^2\varPhi_3(\boldsymbol{u})\varPhi_5(\boldsymbol{u}) + b_k^2\varPhi_1(\boldsymbol{u})\varPhi_3(\boldsymbol{u}) + c_k^2\varPhi_2(\boldsymbol{u}) + d_k^2\varPhi_1^2(\boldsymbol{u}),
\end{gathered}$$

поэтому

$$\begin{gathered}
a_{k-1}a_{k+1}\varPhi_4^2(\boldsymbol{u}) + b_{k-1}b_{k+1}\varPhi_2^2(\boldsymbol{u}) + c_{k-1}c_{k+1}\varPhi_1^2(\boldsymbol{u}) + d_{k-1}d_{k+1}+\\
+(a_{k-1}b_{k+1} + a_{k+1}b_{k-1})\varPhi_2(\boldsymbol{u})\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + (a_{k-1}c_{k+1} + a_{k+1}c_{k-1})\varPhi_1(\boldsymbol{u})\varPhi_4(\boldsymbol{u})+\\
+(a_{k-1}d_{k+1} + a_{k+1}d_{k-1})\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + (b_{k-1}c_{k+1} + b_{k+1}c_{k-1})\varPhi_1(\boldsymbol{u})\varPhi_2(\boldsymbol{u})+\\
+(b_{k-1}d_{k+1} + b_{k+1}d_{k-1})\varPhi_2(\boldsymbol{u}) + (c_{k-1}d_{k+1} + c_{k+1}d_{k-1})\varPhi_1(\boldsymbol{u}) =\\
= a_k^2\varPhi_3(\boldsymbol{u})\varPhi_5(\boldsymbol{u}) + b_k^2\varPhi_1(\boldsymbol{u})\varPhi_3(\boldsymbol{u}) + c_k^2\varPhi_2(\boldsymbol{u}) + d_k^2\varPhi_1^2(\boldsymbol{u})+\\
+a_kb_kP_{24}(\boldsymbol{u}) + a_kc_kP_{14}(\boldsymbol{u}) + a_kd_kP_{04}(\boldsymbol{u})+\\
+b_kc_kP_{12}(\boldsymbol{u}) + b_kd_kP_{02}(\boldsymbol{u}) + c_kd_kP_{01}(\boldsymbol{u}).
\end{gathered}\tag{7}$$

Далее нам потребуется выразить функции P_{ij} и $\varPhi_5$ через новые переменные I, J, x_1, x_2, x_4, где

$$I = I(\boldsymbol{u}),\quad J = J(\boldsymbol{u}),\quad x_1 = \varPhi_1(\boldsymbol{u}) = u_3,\quad x_2 = \varPhi_2(\boldsymbol{u}) = u_2u_3^2u_4,\quad x_4 = \varPhi_4(\boldsymbol{u}).$$

Для этого положим

$$\boldsymbol{u} = \left(s, t, x_1, \frac{x_2}{tx_1^2}\right)$$

и вычислим значения интересующих нас функций:

$$I(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{x_1x_2st}\left(\gamma x_1^2x_2s^2t^2 + \alpha\gamma x_1^2st^2 + \gamma x_2^2st + \alpha\gamma x_2s + \alpha\gamma x_1x_2 + \gamma^2x_1\right),$$

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{x_1x_2st^2}\bigl(\alpha\gamma x_1^3s^2t^4 + \gamma x_1x_2^2s^2t^3 + (\gamma^2x_1^2 + \alpha^2\gamma x_1)st^2 + (\alpha\gamma x_2^2 + \gamma^2x_2)t + \\ + \alpha^2\gamma x_2 + \alpha\gamma^2\bigr),$$

$$\varPhi_4(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{x_2st^2}\left(\alpha\gamma x_1^3s^2t^4 + (\gamma^2x_1^2 + \alpha^3x_1x_2 + \alpha^2\gamma x_1)st^2 + \alpha^2\gamma x_2 + \alpha\gamma^2\right),$$

$$\varPhi_5(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{x_1x_2st^2}\bigl(\alpha^3\gamma x_1^3s^2t^4 + \alpha^2\gamma x_1x_2^2s^2t^3 + \alpha\gamma^2x_1^2x_2st^3 + \\ + (\alpha^2\gamma^2x_1^2 + \alpha^5x_1x_2 + \gamma^2x_2^3 + \alpha^4\gamma x_1)st^2 + \alpha\gamma^2x_2^2st + \\ + (\alpha^3\gamma x_2^2 + \alpha^2\gamma^2x_2)t + \alpha^4\gamma x_2 + \alpha^3\gamma^2\bigr),$$

$$P_{01}(\boldsymbol{u}) = x_1^2t + \frac{x_2}{t}, \qquad P_{02}(\boldsymbol{u}) = x_1^3st^2 + \frac{\alpha x_2 + \gamma}{st^2},$$

$$P_{04}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{x_2st}\bigl(\alpha\gamma x_1^2x_2s^2t^2 + \gamma x_2^3s^2t + (\alpha^3x_1^2x_2 + \alpha^2\gamma x_1^2)st^2 + (\alpha^3x_2^2 + \alpha^2\gamma x_2)s + \\ + (\alpha\gamma x_1x_2^2 + \gamma^2x_1x_2)t + \alpha^2\gamma x_1x_2 + \alpha\gamma^2x_1\bigr),$$

$$P_{12}(\boldsymbol{u}) = x_1x_2st + \frac{\alpha x_2 + \gamma}{st},$$

$$P_{14}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{x_1st^2}\bigl(\alpha\gamma x_1^3s^2t^4 + \gamma x_1x_2^2s^2t^3 + (2\alpha^3x_1x_2 + 2\alpha^2\gamma x_1)st^2 + \\ + (\alpha\gamma x_2^2 + \gamma^2x_2)t + \alpha^2\gamma x_2 + \alpha\gamma^2\bigr),$$

$$P_{24}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{x_1x_2s^2t^3}\bigl(\alpha\gamma x_1^4x_2s^4t^6 + \gamma x_1^2x_2^3s^4t^5 + (\alpha^3x_1^2x_2^2 + \alpha^2\gamma x_1^2x_2)s^3t^4 + \\ + (\alpha^4x_1x_2^2 + 2\alpha^3\gamma x_1x_2 + \alpha^2\gamma^2x_1)st^2 + (\alpha^2\gamma x_2^3 + 2\alpha\gamma^2x_2^2 + \gamma^3x_2)t + \\ + \alpha^3\gamma x_2^2 + 2\alpha^2\gamma^2x_2 + \alpha\gamma^3\bigr).$$

Рассматривая $P_{ij}(\boldsymbol{u})$, $\varPhi_4(\boldsymbol{u})$, $\varPhi_5(\boldsymbol{u})$, $I(\boldsymbol{u})$, $J(\boldsymbol{u})$ как функции от переменных s и t, можно установить между ними следующие соотношения:

$$\varPhi_5(\boldsymbol{u}) = \gamma\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + \gamma I(\boldsymbol{u})x_2 - (\gamma J(\boldsymbol{u}) + \alpha^3\gamma)x_1 + \alpha^2J(\boldsymbol{u}) + \alpha^5,$$

$$\alpha\gamma P_{01}(\boldsymbol{u}) - x_1\varPhi_4(\boldsymbol{u}) - I(\boldsymbol{u})x_1x_2 + (J(\boldsymbol{u}) + \alpha^3)x_1^2 + \gamma x_2^2 = 0,$$

$$\alpha\gamma P_{02}(\boldsymbol{u}) - x_2\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + \gamma^2x_1^2 + \alpha^3x_1x_2 + \alpha^2\gamma x_1 = 0,$$

$$P_{04}(\boldsymbol{u}) - \alpha^3P_{01}(\boldsymbol{u}) - \frac{\gamma}{x_1}\left(P_{01}(\boldsymbol{u})P_{12}(\boldsymbol{u}) - x_2P_{02}(\boldsymbol{u})\right) - \alpha I(\boldsymbol{u})x_1 + \alpha\gamma x_2 = 0,$$

$$\gamma P_{12}(\boldsymbol{u}) + \varPhi_4(\boldsymbol{u}) - (J(\boldsymbol{u}) + \alpha^3)x_1 = 0,$$

$$P_{14}(\boldsymbol{u}) - (J(\boldsymbol{u}) + 2\alpha^3)x_2 + \gamma^2x_1 - \alpha^2\gamma = 0,$$

$$P_{24}(\boldsymbol{u}) - (J(\boldsymbol{u}) + \alpha^3)P_{12}(\boldsymbol{u}) - (\alpha J(\boldsymbol{u}) + \alpha^4)x_1^2 + \alpha x_1\varPhi_4(\boldsymbol{u}) + I(\boldsymbol{u})(\alpha x_1x_2 + \gamma x_1) + \\ + \alpha\gamma x_2^2 + \gamma^2x_2 = 0.$$

Из этих соотношений получаем нужные нам выражения для $P_{ij}(\boldsymbol{u})$, при этом полагаем $\Phi_4(\boldsymbol{u})=x_4$:

$$P_{01}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\alpha\gamma}\left(x_1x_4 + Ix_1x_2 - (J+\alpha^3)x_1^2 - \gamma x_2^2\right),$$

$$P_{02}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\alpha\gamma}\left(x_2x_4 - \alpha^3x_1x_2 - \gamma^2x_1^2 - \alpha^2\gamma x_1\right),$$

$$P_{04}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\alpha\gamma}\big(\alpha^2\gamma Ix_1 + (2J+3\alpha^3)x_1x_4 + (IJ+2\alpha^3I+\gamma^3)x_1x_2 - \\ -(J^2+3\alpha^3J+2\alpha^6)x_1^2 - x_4^2 - Ix_2x_4 - (\gamma J+\alpha^3\gamma)x_2^2\big),$$

$$P_{12}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\gamma}\left((J+\alpha^3)x_1 - x_4\right), \qquad P_{14}(\boldsymbol{u}) = (J+2\alpha^3)x_2 - \gamma^2x_1 + \alpha^2\gamma,$$

$$P_{24}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\gamma}\big((J^2+2\alpha^3J-\gamma^2I+\alpha^6)x_1 + (\alpha\gamma J+\alpha^4\gamma)x_1^2 - \alpha\gamma Ix_1x_2 - \alpha\gamma x_1x_4 - \\ -(J+\alpha^3)x_4 - \alpha\gamma^2x_2^2 - \gamma^3x_2\big).$$

После подстановки в соотношение (7) значений

$$\Phi_1(\boldsymbol{u}) = x_1, \quad \Phi_2(\boldsymbol{u}) = x_2, \quad \Phi_3(\boldsymbol{u}) = \alpha x_2 + \gamma, \quad \Phi_4(\boldsymbol{u}) = x_4,$$

а также найденных выражений для $P_{ij}(\boldsymbol{u})$, $\Phi_5(\boldsymbol{u})$ и переноса всех слагаемых в левую часть получим в левой части полином от переменных x_1, x_2, x_4. Приравняв нулю его коэффициенты, получим систему рекуррентных соотношений из утверждения теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2

Ранг последовательности $\{S_n\}$ равен 4, поэтому для любых целых k, n, n_1, n_2, n_3, n_4

$$\mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} n, n_1, n_2, n_3, n_4 \\ k, 3, 2, 1, 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по первой строке, получим равенство

$$\mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} n_1, n_2, n_3, n_4 \\ 3, 2, 1, 0 \end{pmatrix} S_{n+k+1}S_{n-k} - \mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} n_1, n_2, n_3, n_4 \\ k, 2, 1, 0 \end{pmatrix} S_{n+4}S_{n-3} + \\ +\mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} n_1, n_2, n_3, n_4 \\ k, 3, 1, 0 \end{pmatrix} S_{n+3}S_{n-2} - \mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} n_1, n_2, n_3, n_4 \\ k, 3, 2, 0 \end{pmatrix} S_{n+2}S_{n-1} + \\ +\mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} n_1, n_2, n_3, n_4 \\ k, 3, 2, 1 \end{pmatrix} S_{n+1}S_n = 0.$$

Выбирая n_1, n_2, n_3, n_4 так, чтобы

$$\mathcal{D}_S^{(1)}\begin{pmatrix} n_1, n_2, n_3, n_4 \\ 3, 2, 1, 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

получаем разложение (4), которое в терминах функций Ψ_k имеет вид

$$\Psi_k(\boldsymbol{u}) = \tilde{a}_k\Psi_3(\boldsymbol{u}) + \tilde{b}_k\Psi_2(\boldsymbol{u}) + \tilde{c}_k\Psi_1(\boldsymbol{u}) + \tilde{d}_k.$$

Подставив его во второе из равенств (6), получим соотношение

$$
\begin{gathered}
\tilde a_{k-1}\tilde a_{k+1}\Psi_3^2(\boldsymbol u)+\tilde b_{k-1}\tilde b_{k+1}\Psi_2^2(\boldsymbol u)+\tilde c_{k-1}\tilde c_{k+1}\Psi_1^2(\boldsymbol u)+\tilde d_{k-1}\tilde d_{k+1}+\\
+(\tilde a_{k-1}\tilde b_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde b_{k-1})\Psi_2(\boldsymbol u)\Psi_3(\boldsymbol u)+(\tilde a_{k-1}\tilde c_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde c_{k-1})\Psi_1(\boldsymbol u)\Psi_3(\boldsymbol u)+\\
+(\tilde a_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde d_{k-1})\Psi_3(\boldsymbol u)+(\tilde b_{k-1}\tilde c_{k+1}+\tilde b_{k+1}\tilde c_{k-1})\Psi_1(\boldsymbol u)\Psi_2(\boldsymbol u)+\\
+(\tilde b_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde b_{k+1}\tilde d_{k-1})\Psi_2(\boldsymbol u)+(\tilde c_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde c_{k+1}\tilde d_{k-1})\Psi_1(\boldsymbol u)=\\
=\Psi_1(\boldsymbol u)\left(\tilde a_k^2\Psi_3(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_3(T\boldsymbol u)+\tilde b_k^2\Psi_2(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_2(T\boldsymbol u)+\tilde c_k^2\Psi_1(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_1(T\boldsymbol u)+\tilde d_k^2\right)+\\
+\tilde a_k\tilde b_kQ_{23}(\boldsymbol u)+\tilde a_k\tilde c_kQ_{13}(\boldsymbol u)+\tilde a_k\tilde d_kQ_{03}(\boldsymbol u)+\tilde b_k\tilde c_kQ_{12}(\boldsymbol u)+\tilde b_k\tilde d_kQ_{02}(\boldsymbol u)+\tilde c_k\tilde d_kQ_{01}(\boldsymbol u),
\end{gathered}
$$

где

$$
Q_{ij}(\boldsymbol u)=\Psi_1\left(\boldsymbol u)(\Psi_i(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_j(T\boldsymbol u)+\Psi_j(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_i(T\boldsymbol u)\right).
$$

Согласно второму равенству в (6),

$$
\begin{gathered}
\Psi_1(\boldsymbol u)\left(\tilde a_k^2\Psi_3(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_3(T\boldsymbol u)+\tilde b_k^2\Psi_2(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_2(T\boldsymbol u)+\tilde c_k^2\Psi_1(T^{-1}\boldsymbol u)\Psi_1(T\boldsymbol u)+\tilde d_k^2\right)=\\
=\tilde a_k^2\Psi_2(\boldsymbol u)\Psi_4(\boldsymbol u)+\tilde b_k^2\Psi_1(\boldsymbol u)\Psi_3(\boldsymbol u)+\tilde c_k^2\Psi_2(\boldsymbol u)+\tilde d_k^2\Psi_1(\boldsymbol u),
\end{gathered}
$$

поэтому

$$
\begin{gathered}
\tilde a_{k-1}\tilde a_{k+1}\Psi_3^2(\boldsymbol u)+\tilde b_{k-1}\tilde b_{k+1}\Psi_2^2(\boldsymbol u)+\tilde c_{k-1}\tilde c_{k+1}\Psi_1^2(\boldsymbol u)+\tilde d_{k-1}\tilde d_{k+1}+\\
+(\tilde a_{k-1}\tilde b_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde b_{k-1})\Psi_2(\boldsymbol u)\Psi_3(\boldsymbol u)+(\tilde a_{k-1}\tilde c_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde c_{k-1})\Psi_1(\boldsymbol u)\Psi_3(\boldsymbol u)+\\
+(\tilde a_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde a_{k+1}\tilde d_{k-1})\Psi_3(\boldsymbol u)+(\tilde b_{k-1}\tilde c_{k+1}+\tilde b_{k+1}\tilde c_{k-1})\Psi_1(\boldsymbol u)\Psi_2(\boldsymbol u)+\\
+(\tilde b_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde b_{k+1}\tilde d_{k-1})\Psi_2(\boldsymbol u)+(\tilde c_{k-1}\tilde d_{k+1}+\tilde c_{k+1}\tilde d_{k-1})\Psi_1(\boldsymbol u)=\\
=\tilde a_k^2\Psi_2(\boldsymbol u)\Psi_4(\boldsymbol u)+\tilde b_k^2\Psi_1(\boldsymbol u)\Psi_3(\boldsymbol u)+\tilde c_k^2\Psi_2(\boldsymbol u)+\tilde d_k^2\Psi_1(\boldsymbol u)+\\
+\tilde a_k\tilde b_kQ_{23}(\boldsymbol u)+\tilde a_k\tilde c_kQ_{13}(\boldsymbol u)+\tilde a_k\tilde d_kQ_{03}(\boldsymbol u)+\\
+\tilde b_k\tilde c_kQ_{12}(\boldsymbol u)+\tilde b_k\tilde d_kQ_{02}(\boldsymbol u)+\tilde c_k\tilde d_kQ_{01}(\boldsymbol u).
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Как и в предыдущем параграфе, нам потребуются выражения функций Q_{ij} и Ψ_4 через новые переменные I, J, y_1, y_2, y_3, где

$$
I=I(\boldsymbol u),\quad J=J(\boldsymbol u),\quad y_1=\Psi_1(\boldsymbol u)=u_3u_4,\quad y_2=\Psi_2(\boldsymbol u)=\frac{\alpha u_2u_3^2u_4+\gamma}{u_1u_2u_3},\quad y_3=\Psi_3(\boldsymbol u).
$$

Положим

$$
\boldsymbol u=\left(\frac{s+\alpha y_1}{y_2},\frac{t}{y_1},\frac{\gamma y_1}{st},\frac{st}{\gamma}\right)
$$

и вычислим значения интересующих нас функций:

$$
\begin{gathered}
I(\boldsymbol u)=\frac{1}{y_1y_2st}\left(\alpha y_1y_2s^2t+\gamma y_1y_2st^2+(\gamma^2y_1+\alpha\gamma y_2)st+\gamma y_1y_2^2s+\alpha\gamma^2y_1^2t\right),\\
J(\boldsymbol u)=\frac{1}{y_1y_2st}\big(\alpha^2y_2s^2t+\gamma^2y_1st^2+(\gamma y_1y_2^2+\alpha\gamma^2)st+\alpha y_1y_2^2s^2+\alpha\gamma^2y_1^2t^2+\\
+\gamma^2y_1y_2s+\alpha^2\gamma^2y_1t\big),
\end{gathered}
$$

$$\Psi_3(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{y_2 s}\left(\alpha y_2 s^2 + (\alpha^2 y_1 y_2 + \gamma^2)s + \alpha\gamma^2 y_1\right),$$
$$\Psi_4(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{y_1 y_2 st}\big(\alpha^3 y_2 s^2 t + \alpha\gamma^2 y_1 st^2 + \alpha^2 y_1 y_2^2 s^2 + \alpha^2\gamma^2 y_1^2 t^2 +$$
$$+(\alpha^2\gamma^2 + \alpha^4 y_1 y_2 + \gamma^2 y_1^2 y_2)st + \alpha\gamma^2 y_1 y_2 s + \alpha^3\gamma^2 y_1 t\big),$$
$$Q_{01}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\gamma}\left(y_2 s + \frac{\gamma^2 y_1}{s}\right), \qquad Q_{02}(\boldsymbol{u}) = \frac{y_1}{\gamma y_2 st}\left(\gamma^2 st^2 + \alpha y_2^2 s^2 + \alpha\gamma^2 y_1 t^2 + \gamma^2 y_2 s\right),$$
$$Q_{03}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\gamma st}\left(\alpha^2 y_2 s^2 t + \gamma^2 y_1 st^2 + 2\alpha\gamma^2 st + \gamma^2 y_1 y_2 s + \alpha^2\gamma^2 y_1 t\right),$$
$$Q_{12}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{st}\left(s^2t^2 + \alpha y_1 st^2 + \alpha y_1 y_2 s + \gamma^2 y_1\right),$$
$$Q_{13}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{y_1 st}\left(\alpha y_2 s^2 t + y_1 y_2^2 s^2 + \gamma^2 y_1^2 t^2 + 2\alpha^2 y_1 y_2 st + \alpha\gamma^2 y_1 t\right),$$
$$Q_{23}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{y_2 st^2}\big(\alpha^2 y_2 s^2 t^3 + \gamma^2 y_1 st^4 + (\alpha^3 y_1 y_2 + \alpha\gamma^2)st^3 + \alpha\gamma^2 y_1^2 t^4 + \alpha^2 y_2^2 s^2 t +$$
$$+\alpha^2\gamma^2 y_1 t^3 + \alpha y_1 y_2^3 s^2 + (\alpha^3 y_1 y_2^2 + \alpha\gamma^2 y_2)st + \gamma^2 y_1 y_2^2 s + \alpha^2\gamma^2 y_1 y_2 t\big).$$

Как и ранее, рассматривая $Q_{ij}(\boldsymbol{u})$, $\Psi_3(\boldsymbol{u})$, $\Psi_4(\boldsymbol{u})$, $I(\boldsymbol{u})$, $J(\boldsymbol{u})$ как функции от переменных s и t, находим между ними следующие соотношения:

$$\Psi_4(\boldsymbol{u}) = \alpha J(\boldsymbol{u}) - \alpha\gamma y_2 + \gamma^2 y_1 + \alpha^4,$$
$$\alpha\gamma Q_{01}(\boldsymbol{u}) - y_2\Psi_3(\boldsymbol{u}) + \alpha^2 y_1 y_2 + \gamma^2 = 0,$$
$$\gamma y_2 Q_{02}(\boldsymbol{u}) + \alpha^2\gamma Q_{01}(\boldsymbol{u}) - y_1 y_2 J(\boldsymbol{u}) + \gamma y_1 y_2^2 + \alpha\gamma^2 = 0,$$
$$Q_{03}(\boldsymbol{u}) - \alpha^2 Q_{01}(\boldsymbol{u}) - y_1 I(\boldsymbol{u}) + y_1\Psi_3(\boldsymbol{u}) - \alpha^2 y_1^2 - \alpha\gamma = 0,$$
$$\alpha^3\gamma y_1 Q_{01}(\boldsymbol{u}) - \alpha\gamma y_2 Q_{12}(\boldsymbol{u}) + y_2\Psi_3(\boldsymbol{u})(I(\boldsymbol{u}) - \Psi_3(\boldsymbol{u})) - \gamma y_2 J(\boldsymbol{u}) +$$
$$+\alpha^4 y_1^2 y_2 + \gamma^2 y_2^2 - \alpha^3\gamma y_2 + \alpha^2\gamma^2 y_1 = 0,$$
$$\alpha y_1 Q_{13}(\boldsymbol{u}) - \gamma y_2 Q_{02}(\boldsymbol{u}) - \alpha^2\gamma Q_{01}(\boldsymbol{u}) + \gamma y_1(I(\boldsymbol{u}) - \Psi_3(\boldsymbol{u})) +$$
$$+\alpha^2\gamma y_1^2 - 2\alpha^3 y_1 y_2 - \alpha\gamma^2 = 0,$$
$$Q_{23}(\boldsymbol{u}) - \alpha^2 Q_{12}(\boldsymbol{u}) - (I(\boldsymbol{u}) - \Psi_3(\boldsymbol{u}) + \alpha^2 y_1)Q_{02}(\boldsymbol{u}) + \alpha\gamma y_1 Q_{01}(\boldsymbol{u}) + 2\gamma^2 y_1 = 0.$$

Из этих соотношений получаем нужные нам выражения (полагаем $\Psi_3(\boldsymbol{u}) = y_3$):

$$Q_{01}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\alpha\gamma}\left(y_2 y_3 - \alpha^2 y_1 y_2 - \gamma^2\right), \qquad Q_{02}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\gamma}\left((J + \alpha^3)y_1 - \gamma y_1 y_2 - \alpha y_3\right),$$
$$Q_{03}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\gamma}\left(\alpha y_2 y_3 - \alpha^3 y_1 y_2 - \gamma y_1 y_3 + \gamma I y_1 + \alpha^2\gamma y_1^2\right),$$
$$Q_{12}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\alpha\gamma}\left(\alpha^2 y_1 y_3 - y_3^2 + I y_3 + \gamma^2 y_2 - \gamma J - \alpha^3\gamma\right),$$
$$Q_{13}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\alpha}\left(\gamma y_3 + (J + 2\alpha^3)y_2 - \gamma y_2^2 - \alpha^2\gamma y_1 - \gamma I\right),$$
$$Q_{23}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\gamma}\big((\alpha^2 J + \alpha^5)y_1^2 + (IJ + \alpha^3 I - \gamma^3)y_1 + \alpha\gamma^2 y_2 - (J + \alpha^3)y_1 y_3 -$$
$$-\gamma I y_1 y_2 - \alpha\gamma J - \alpha^4\gamma\big).$$

После подстановки в соотношение (8) значений

$$\Psi_1(\boldsymbol{u}) = y_1, \quad \Psi_2(\boldsymbol{u}) = y_2, \quad \Psi_3(\boldsymbol{u}) = y_3,$$

а также найденных выражений для $Q_{ij}(\boldsymbol{u})$, $\Psi_4(\boldsymbol{u})$ и переноса всех слагаемых в левую часть получим в левой части полином от переменных y_1, y_2, y_3. Приравняв нулю его коэффициенты, получим систему рекуррентых соотношений из утверждения теоремы 2.

4. Примеры

В заключение приведем значения коэффициентов разложений (3) и (4) для некоторых значений k:

$$a_5 = \gamma, \quad b_5 = \gamma I, \quad c_5 = -\gamma J - \alpha^3\gamma, \quad d_5 = \alpha^2 J + \alpha^5,$$
$$a_6 = -\alpha J - \alpha^4, \quad b_6 = \alpha\gamma^3, \quad c_6 = \alpha J^2 + 3\alpha^4 J - \alpha\gamma^2 I + 2\alpha^7, \quad d_6 = \gamma^4,$$
$$a_7 = \gamma^2 J + \alpha^3\gamma^2, \quad b_7 = \alpha^3 J^2 + 2\alpha^6 J + \alpha^9 + \gamma^5,$$
$$c_7 = \alpha^3\gamma^2 J - \gamma^4 I + \alpha^6\gamma^2, \quad d_7 = \alpha^2\gamma^3 I - \alpha^5\gamma J - \alpha^8\gamma.$$

$$\tilde a_4 = 0, \quad \tilde b_4 = -\alpha\gamma, \quad \tilde c_4 = \gamma^2, \quad \tilde d_4 = \alpha J + \alpha^4,$$
$$\tilde a_5 = \gamma^2, \quad \tilde b_5 = \gamma J + \alpha^3\gamma, \quad \tilde c_5 = 0, \quad \tilde d_5 = \alpha^3 J - \gamma^2 I + \alpha^6,$$
$$\tilde a_6 = \gamma^2 I - \alpha^3 J - \alpha^6, \quad \tilde b_6 = \gamma^4,$$
$$\tilde c_6 = \alpha^2 J^2 + 3\alpha^5 J - \alpha^2\gamma^2 I + 2\alpha^8, \quad \tilde d_6 = -\gamma^3 J - \alpha^3\gamma^3,$$
$$\tilde a_7 = \alpha\gamma^3 I - \alpha\gamma J^2 - 3\alpha^4\gamma J - 2\alpha^7\gamma,$$
$$\tilde b_7 = \alpha^4 J^2 + 2\alpha^7 J - \alpha\gamma^2 IJ - \alpha^4\gamma^2 I + \alpha^{10},$$
$$\tilde c_7 = \alpha^3\gamma J^2 + 3\alpha^6\gamma J - \alpha^3\gamma^3 I + 2\alpha^9\gamma + \gamma^6,$$
$$\tilde d_7 = \alpha\gamma I J^2 + 3\alpha^4\gamma I J - \alpha\gamma^3 I^2 + 2\alpha^7\gamma I + \alpha\gamma^4 J + \alpha^4\gamma^4.$$

Список литературы

[1] Авдеева М. О., Быковский В. А., “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:2, (2016), 115–122.

[2] Hone A. N. W., “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, *Bull. London Math. Soc.*, **37**:2, (2005), 161–171.

[3] Swart C. S., *Elliptic curves and related sequences*, Royal Holloway and Bedford New College, University of London, 2003.

[4] Hone A. N. W., “Analytic solutions and integrability for bilinear recurrences of order six”, *Appl. Anal.*, **89**:4, (2010), 473–492.

[5] Fedorov Y. N., Hone A. N. W., “Sigma function solution of the general Somos-6 recurrence via hyperelleptic Prym varieties”, *Journal of Integrable Systems*, **1**:1, (2016), 012.

[6] Baker H. F., *An Introduction to the Theory of Multiply Periodic Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1907.

[7] Van der Poorten A. J., Swart C. S., "Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos k", *Bull. London Math. Soc.*, **38**:4, (2006), 546–554.

[8] Устинов А. В., "Элементарный подход к изучению последовательностей Сомоса", *Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика*, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Труды МИАН, **305**, 2019, 330–343.

Поступила в редакцию
21 августа 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00).

Romanov M. A.[1] Addition formulae for a special case of the Somos 6 sequence. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2026. V. 26. No 1. P. 110–122.

[1] Khabarovsk Division of the Institute of Applied Mathematics Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk

ABSTRACT

Addition formulae for a special case of the Somos 6 sequence are found.

Key words: *Somos sequences, sequences of finite rank, addition formulae.*