Дальневосточный математический журнал. 2026. Т. 26. № 1. С. 133–139

УДК 517.95
MSC2020 35A16

© А. Ю. Чеботарев[1]

Устойчивость решений краевых задач сложного теплообмена с граничными условиями Коши

Доказана нелокальная (без ограничений малости) разрешимость неоднородной краевой задачи сложного теплообмена с граничными условиями для температуры. Установлено условие единственности и устойчивости решения.

Ключевые слова: *неоднородные уравнения сложного теплообмена, диффузионное приближение, граничные условия Коши, нелокальная разрешимость, условие единственности и устойчивости решения*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202614

Введение

Постановка краевых задач для диффузионных уравнений сложного теплообмена, использующих P_1–приближение для уравнения переноса излучения, включает, как правило, краевые условия для температуры и для интенсивности излучения [1–6]. В работах [7,8] предложено для уравнений сложного теплообмена использовать краевые условия только для температурного поля, а также выполнен анализ однородных краевых задач, включающих уравнение четвертого порядка для температуры.

В данной работе доказана разрешимость и изучена устойчивость решений неоднородной краевой задачи для стационарных уравнений сложного теплообмена с граничными условиями Коши для температурного поля.

Рассмотрим краевую задачу для стационарных уравнений сложного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с условиями Коши на границе $\Gamma = \partial\Omega$:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f,\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = \mathrm{g}, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

$$\theta|_\Gamma = \theta_b, \quad \partial_n\theta|_\Gamma = q_b. \tag{2}$$

Здесь θ и φ — нормализованные температура и интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a, b, κ_a

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `cheb@iam.dvo.ru`

и α, описывающие свойства среды, определены в [3]. Функции f,g моделируют плотности внутренних источников тепла и излучения. Через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Γ.

Разрешимость краевой задачи (1), (2) в случае $f=0, \mathrm{g}=0$ и описание множества решений представлены в [7]. В настоящей работе доказано существование сильного решения неоднородной краевой задачи (1), (2) и представлены достаточные условия, гарантирующие единственность и устойчивость решения. Статья организована следующим образом. В первом параграфе получено операторное уравнение для температурного поля и показано, что оно определяет сильное решение краевой задачи. Разрешимость задачи доказана в параграфе 2. В третьем параграфе выведено условие единственности и устойчивости решения краевой задачи (1), (2).

1. Формализация задачи. Операторное уравнение

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков и для Ω справедливы свойства 1,2 из [9, гл.3, параграф 8]. Через L^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$ обозначаем пространство Лебега, а через H^s — пространство Соболева W_2^s, $H_0^s(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $H^s(\Omega)$, $V=\{v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega):\partial_n v|_\Gamma=0\}$. Скалярное произведение и норму в пространстве $L^2(\Omega)$ обозначаем стандартным образом $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$, а в пространстве V выбираем в виде $[u,v]=(\Delta u,\Delta v)$, $\|u\|_V=\|\Delta u\|$. Справедливы неравенства непрерывности вложений функциональных пространств:

$$\|u\|_{C(\bar\Omega)}\leqslant K_0\|u\|_V\ \forall u\in V;\quad \|v\|^2\leqslant K_1\left(\|\nabla v\|^2+\int\limits_\Gamma v^2d\Gamma\right)\ \forall v\in H^1(\Omega).$$

Предполагаем, что исходные данные краевой задачи (1), (2) удовлетворяют условиям

$$(i)\quad \theta_b=\hat\theta|_\Gamma,\ q_b=\partial_n\hat\theta|_\Gamma,\ \text{ где } \hat\theta\in H^2(\Omega);\quad f,\mathrm{g}\in L^2(\Omega);\quad a,b,\kappa_a,\alpha=\mathrm{const}>0.$$

Для вывода операторной формулировки задачи (1), (2) умножим второе уравнение в (1) на b и сложим с первым уравнением. Тогда

$$-\Delta(a\theta+\alpha b\varphi)=f+b\mathrm{g},$$

и первое уравнение в (1) можно записать в виде

$$-a\Delta\theta+h(\theta)=\frac{\kappa_a}{\alpha}(a\theta+\alpha b\varphi)+f,\quad h(\theta)=b\kappa_a|\theta|\theta^3+\frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta.$$

Умножим это уравнение на функцию Δv, где $v\in V$, и проинтегрируем по области Ω. Тогда

$$(-a\Delta\theta+h(\theta),\Delta v)=\frac{\kappa_a}{\alpha}(a\theta+\alpha b\varphi,\Delta v)+(f,\Delta v)=-\frac{\kappa_a}{\alpha}(f+b\mathrm{g},v)+(f,\Delta v).$$

Полученное равенство содержит только температурное поле, которое представим в виде $\theta = \hat{\theta} + y$, где $y \in V$,

$$(a\Delta y - h(\theta), \Delta v) = \frac{\kappa_a}{\alpha}(f, v) - (f, \Delta v) - a(\Delta\hat{\theta}, \Delta v) + \frac{\kappa_a b}{\alpha}(\mathrm{g}, v) \quad \forall v \in V. \qquad (3)$$

Определим нелинейный оператор $A : V \to V$ и элемент $r \in V$ так, что $\forall v \in V$

$$[Ay, v] = (h(\hat{\theta} + y), \Delta v), \quad [r, v] = \frac{\kappa_a}{\alpha}(f + b\mathrm{g}, v) - (f + a\Delta\hat{\theta}, \Delta v).$$

Равенство (3) можно записать в виде нелинейного операторного уравнения в пространстве V.

Определение. Пара $\theta \in H^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ называется *слабым решением* задачи (1), (2), если $\theta = \hat{\theta} + y$, где $y \in V$,

$$ay - Ay = r, \qquad (4)$$

$$b\kappa_a\varphi = -a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 - f \quad \text{п.в. в } \Omega. \qquad (5)$$

Замечание 1. Из равенств (4), (5) следует, что $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ и слабое решение фактически является сильным. Действительно, равенство (5) — это первое уравнение в (1). Используя (5), выводим из (4) равенство $(\alpha b\varphi + a\kappa_a\theta, \Delta v) = -(f + b\mathrm{g}, v)$. Поэтому $\alpha b\Delta\varphi + a\Delta\theta = -f - b\mathrm{g}$ почти всюду в Ω, и значит, $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$. Сложив это равенство с первым уравнением в (1), получаем уравнение для φ. В дальнейшем под решением задачи (1), (2) понимаем пару $\theta \in H^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Omega), \Delta\varphi \in L^2(\Omega)$, удовлетворяющую почти всюду в Ω уравнениям (1) и почти всюду на Γ условиям (2).

2. Разрешимость задачи

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i). *Тогда существует решение задачи* (1), (2).

Доказательство. Установим разрешимость операторного уравнения (4). Тогда пара $\theta = \hat{\theta} + y$, $\varphi = -a(b\kappa_a)^{-1}\Delta\theta + |\theta|\theta^3 - (b\kappa_a)^{-1}f$ будет решением задачи (1), (2).

Задача (4) равносильна отысканию неподвижной точки оператора $\frac{1}{a}(A + r)$. Покажем сначала, что оператор A вполне непрерывен. Пусть $\|u_{1,2}\|_V \leqslant \rho$. Заметим, что

$$|h(\theta_1) - h(\theta_2)| \leqslant (2b\kappa_a(|\theta_1^3| + |\theta_2^3|) + a\kappa_a\alpha^{-1})|\theta_1 - \theta_2|.$$

Тогда

$$[Au_1 - Au_2, v] = (h(\hat{\theta} + u_1) - h(\hat{\theta} + u_2), \Delta v) \leqslant \kappa_a(4b(\|\hat{\theta}\|_{C(\bar{\Omega})} + K_0\rho)^3 + a\alpha^{-1})\|u_1 - u_2\|\|v\|_V.$$

Полагая здесь $v = Au_1 - Au_2$, получаем

$$\|Au_1 - Au_2\|_V \leqslant \kappa_a(4a^{-1}b(\|\hat{\theta}\|_{C(\bar{\Omega})} + K_0\rho)^3 + \alpha^{-1})\|u_1 - u_2\|.$$

Из последнего неравенства в силу компактности вложения $V \subset L^2(\Omega)$ следует, что оператор A вполне непрерывен. Таким образом, для доказательства разрешимости задачи (1), (2) достаточно на основании принципа Лере – Шаудера доказать равномерную по $\lambda \in (0,1]$ ограниченность в пространстве V множества решений операторного уравнения $ay = \lambda(Ay + r)$. Указанное уравнение запишем в виде

$$(a\Delta y - \lambda h(\theta), \Delta v) = \lambda[r, v] \quad \forall v \in V. \tag{6}$$

Получим априорную оценку решения уравнения (6). В (6) полагаем $v = y$, $\theta = \hat\theta + y$. Тогда

$$a\|y\|_V^2 + \lambda(h'(\theta)\nabla\theta, \nabla\theta) = \lambda(h'(\theta)\nabla\theta, \nabla\hat\theta) + \lambda[r, y].$$

Здесь $h'(\theta) = 4b\kappa_a|\theta|^3 + a\kappa_a/\alpha > 0$. Правую часть оценим, используя неравенства

$$(h'(\theta)\nabla\theta, \nabla\hat\theta) \leqslant \frac{1}{2}(h'(\theta)\nabla\theta, \nabla\theta) + \frac{1}{2}(h'(\theta)\nabla\hat\theta, \nabla\hat\theta),$$
$$[r, y] \leqslant \frac{a}{2}\|y\|_V^2 + \frac{1}{2a}\|r\|_V^2.$$

Тогда

$$a\|y\|_V^2 + \lambda(h'(\theta)\nabla\theta, \nabla\theta) \leqslant \lambda(h'(\theta)\nabla\hat\theta, \nabla\hat\theta) + \frac{1}{a}\|r\|_V^2. \tag{7}$$

Оценим сверху величину $(|\theta|^3\nabla\hat\theta, \nabla\hat\theta)$. Пусть $\psi = |\theta|^{5/2}\mathtt{sign}\theta$. Поскольку $\theta \in H^2(\Omega)$, то $\psi \in H^1(\Omega)$. Поэтому для $\varepsilon > 0$ получаем

$$(|\theta|^3\nabla\hat\theta, \nabla\hat\theta) = (|\psi|^{6/5}\nabla\hat\theta, \nabla\hat\theta) \leqslant \|\psi\|^{6/5}\|\nabla\hat\theta\|^2_{L^5(\Omega)} \leqslant \frac{3}{5}\varepsilon^{5/3}\|\psi\|^2 + \frac{2}{5}\varepsilon^{-5/2}\|\nabla\hat\theta\|^5_{L^5(\Omega)}.$$

Заметим, что $\|\psi\|^2 \leqslant K_1\left(\|\nabla\psi\|^2 + \int\limits_\Gamma \psi^2 d\Gamma\right)$, и при этом имеем

$$\|\nabla\psi\|^2 = \frac{25}{4}(|\theta|^3\nabla\theta, \nabla\theta), \quad \psi^2|_\Gamma = |\hat\theta|^5.$$

Выберем ε так, что $3K_1\varepsilon^{5/3} = 4/5$. Тогда из (7) следует равномерная по $\lambda \in (0,1]$ оценка

$$a\|y\|_V^2 \leqslant a\kappa_a\alpha^{-1}\|\nabla\hat\theta\|^2 + \frac{4}{5}b\kappa_a(3K_1\varepsilon^{5/3}\|\hat\theta\|^5_{L^5(\Gamma)} + 2\varepsilon^{-5/2}\|\nabla\hat\theta\|^5_{L^5(\Omega)}) + \frac{1}{a}\|r\|_V^2. \tag{8}$$

Оценка (8) влечет разрешимость уравнения (4), а значит, и задачи (1), (2). □

3. Условия устойчивости решения краевой задачи

Оценка (8) справедлива для любого решения $y = \theta - \hat\theta$ уравнения (4), и поэтому в силу непрерывности вложения $H^2(\Omega) \subset C(\bar\Omega)$ существует постоянная M, зависящая только от $a, b, \kappa_a, \alpha, \|f\|, \|\mathrm{g}\|, \|\hat\theta\|_{H^2(\Omega)}$, такая, что

$$\|\theta\|_{C(\bar\Omega)} \leqslant M.$$

Выведем достаточное условие единственности и устойчивости решения уравнения (4) и краевой задачи (1), (2). Пусть

$$K^2 = \inf\left\{\frac{1}{4}\|\Delta v\|^2 + \frac{\kappa_a}{\alpha}\|\nabla v\|^2 \ :\ v \in V,\ \|v\| = 1\right\}.$$

Лемма 1. *Величина K^2 положительна.*

Доказательство. Если $K=0$, то найдется последовательность $v_m \in V$ такая, что
$$\|v_m\| = 1, \quad \frac{1}{4}\|\Delta v_m\|^2 + \frac{\kappa_a}{\alpha}\|\nabla v_m\|^2 \to 0.$$
Последовательность v_m сходится к нулю в пространстве V, а значит, и в $L^2(\Omega)$, что противоречит условию $\|v_m\| = 1$. □

Замечание 2. Из определения величины K^2 следует неравенство
$$\frac{1}{4}\|\Delta v\|^2 + \frac{\kappa_a}{\alpha}\|\nabla v\|^2 \geqslant K^2\|v\|^2 \quad \forall v \in V. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i) и дополнительно $2\sqrt{2}b\kappa_a M^3 \leqslant Ka$. Тогда решение уравнения (4) существует, является единственным и устойчивым,*
$$a\|y_1 - y_2\|_V \leqslant 4\|r_1 - r_2\|_V. \tag{10}$$
Здесь $y_{1,2}$ — решение уравнения (4) с правой частью $r_{1,2}$.

Доказательство. Существование решения уравнения (4) для любой правой части $r \in V$ следует из теоремы 1. Получим оценку устойчивости решения (10), из которой будет следовать также единственность решения. Пусть $r = r_1 - r_2$, $y = y_1 - y_2$, $\theta_{1,2} = y_{1,2} + \hat{\theta}$. Вычитая уравнения (4), записанные для $r_{1,2}$, получим
$$(a\Delta y - h(\theta_1) + h(\theta_2), \Delta v) = [r, v] \quad \forall v \in V. \tag{11}$$
В (11) полагаем $v = y$. Тогда
$$a\|y\|_V^2 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\|\nabla y\|^2 = b\kappa_a(|\theta_1|\theta_1^3 - |\theta_2|\theta_2^3, \Delta y) + [r, y].$$
Правая часть равенства не превосходит ($\varepsilon > 0$)
$$4b\kappa_a M^3\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|y\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|y\|_V^2\right) + \|r\|_V\|y\|_V.$$
Выбирая ε так, что $4b\kappa_a M^3\varepsilon = a$, получаем оценку
$$\frac{a}{2}\|y\|_V^2 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\|\nabla y\|^2 \leqslant \frac{8b^2\kappa_a^2 M^6}{a}\|y\|^2 + \|r\|_V\|y\|_V \leqslant K^2 a\|y\|^2 + \|r\|_V\|y\|_V.$$
Левая часть неравенства с учетом (9) оценивается снизу через величину
$$\frac{a}{4}\|y\|_V^2 + K^2 a\|y\|^2,$$
и поэтому получаем оценку устойчивости (10). □

Замечание 3. Условие $2\sqrt{2}b\kappa_a M^3 \leqslant Ka$ теоремы 2 играет ключевую роль для доказательства единственности решения и его устойчивости. Фактически это условие малости, которое выполняется, например, если характерный размер области Ω и (или) величина $1/a$ достаточно малы.

Оценка устойчивости (10) решения операторного уравнения (4) позволяет получать оценки устойчивости решения краевой задачи (1), (2) при изменении f,g или $\hat{\theta}$. В качестве примера приведем следующий результат. Обозначим через K_2 норму оператора вложения $V \subset L^2(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (i) *и дополнительно* $2\sqrt{2}b\kappa_a M^3 \leqslant Ka$. *Тогда решение краевой задачи* (1), (2) *существует, является единственным и устойчивым относительно изменений* f,

$$a\|\theta_1 - \theta_2\|_V \leqslant 4\,(K_2\kappa_a/\alpha + 1)\,\|f_1 - f_2\|, \tag{12}$$

$$b\kappa_a\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant (4(K_2\kappa_a/\alpha + 1)(4KK_2 + 1) + 1)\,\|f_1 - f_2\|. \tag{13}$$

Здесь $\theta_{1,2}, \varphi_{1,2}$ *— решение краевой задачи* (1),(2) *с правой частью* $f_{1,2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f = f_1 - f_2$. В этом случае $[r, v] = \frac{\kappa_a}{\alpha}(f, v) - (f, \Delta v)$, и поэтому $\|r\|_V \leqslant (K_2\kappa_a/\alpha + 1)\,\|f_1 - f_2\|$. Оценка (12) следует из неравенства (10).

Для получения (13) заметим, что

$$b\kappa_a(\varphi_1 - \varphi_2) = -a\Delta(\theta_1 - \theta_2) + b\kappa_a(|\theta_1|\theta_1^3 - |\theta_2|\theta_2^3)) - f,$$

и поэтому

$$b\kappa_a\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant a\|\theta_1 - \theta_2\|_V + 4b\kappa_a M^3\|\theta_1 - \theta_2\| + \|f\|.$$

Используя оценку (12), получаем (13). □

Список литературы

[1] Pinnau R., “Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.

[2] Tse O., Pinnau R., Siedow N., “Identification of temperature dependent parameters in laser–interstitial thermo therapy”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:9, (2012), 1–29.

[3] Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **20**:3, (2015), 776–784.

[4] Амосов А. А., “Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:3, (2017), 510–535.

[5] Amosov A. A., “Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation”, *J. Math. Sci.*, **233**, (2018), 777–806.

[6] Amosov A. A., Krymov N. E., “On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems”, *J. Math. Sci.*, **244**:6, (2020), 357–377.

[7] Колобов А. Г., Пак Т. В., Чеботарев А. Ю., “Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:7, (2019), 1258–1263.

[8] Chebotarev A. Y., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., “Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type ”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **75**, (2019), 262–269.

[9] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва, 1973.

Поступила в редакцию
16 июля 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00).

Chebotarev A. Yu.[1] Stability of solutions of boundary value problems of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2026. V. 26. No 1. P. 133–139.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The non-local (without smallness restrictions) solvability of the non-homogeneous boundary value problem of complex heat exchange with boundary conditions for temperature is proved. The condition of uniqueness and stability of the solution is established.

Key words: *non-homogeneous equations of complex heat transfer, diffusion approximation, Cauchy boundary conditions, non-local solvability, condition of uniqueness and stability of the solution*